The North African Journal of Scientific Publishing (NAJSP)
مجلة شمال إفريقيا للنشر العلمي (NAJSP)
E-ISSN: 2959-4820
Volume 4, Issue 3, 2026
Page No: 257-260
Website: https://najsp.com/index.php/home/index
SJIFactor 2024: 5.49 معامل التأثير العربي (AIF) 2025: 0.69 ISI 2024: 0.696

A study on the number of strictly increasing functions and non-decreasing functions

Manal Mustafa Almesbahi[1*], Abdurahman Masoud Abdalla[2], Abdusalam Mohamed Khalifa[3]
[1]Department of Applied Mathematics, Faculty of Education, Zaytuna University, Libya
[2,3]Department of Pure Mathematics, Faculty of Education, Zaytuna University, Libya

دراسة حول عدد الدوال المتزايدة بإطراد والدوال الغير متناقصة

منال مصطفي المصباحي[1]، عبد الرحمن مسعود عبدالله[2]، عبد السلام محمد خليفة[3]
[1]قسم الرياضيات تطبيقية، كلية التربية، جامعة الزيتونة، ليبيا
[2،3]قسم الرياضيات بحثه، كلية التربية، جامعة الزيتونة، ليبيا

*Corresponding author: m.almesbahi@azu.edu.ly

Received: June 07, 2026	Accepted: August 22, 2026	Published: September 07, 2026

Copyright: © 2026 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Abstract:
In this study, we looked at the functions ordered between two finite sets, focusing on strictly increasing and non-decreasing functions. We also provided mathematical formulas to determine each type of these functions. Additionally, we used Stirling's approximation to study the exponential growth of the number of these functions when the number of elements in the domain is large.

Keywords: Monotonic Functions, Strictly Increasing Functions, Decreasing Functions, Stirling's Approximation.

الملخص:
في هذا البحث، قمنا بدراسة الدوال المرتبة بين مجموعتين منتهيتين، مع التركيز على الدوال المتزايدة باطراد والدوال غير المتناقصة. كما قدمنا صيغًا رياضية لتحديد كل نوع من هذه الدوال. بالإضافة إلى ذلك، استخدمنا تقريب ستيرلنغ لدراسة النمو الأسي لعدد هذه الدوال عندما يكون عدد عناصر المجال كبيرًا.

الكلمات المفتاحية: الدوال المرتبة، الدوال المتزايدة بإطراد، الدوال المتناقصة، تقريب ستيرلنغ.

المقدمة:

تُعدّ الدوال من الركائز الجوهرية في علم الرياضيات، لان الدوال هي التي تصف العلاقات بين المجموعات وتحليل بنيتها. وفي إطار الرياضيات المتقطعة، وهنا تم تركيز على دراسة الدوال المعرّفة على المجموعات المنتهية، نظرًا لارتباطها الوثيق بمسائل العدّ والبنى التوافقية ونظرية الترتيب [1].

وقد ركزت الدراسات الكلاسيكية في التوافقيات دراسة فئات خاصة من الدوال التي تحافظ على البنية الترتيبية، ولا سيما الدوال المتزايدة بإطراد والدوال غير المتناقصة، حيث تم استنتاج أنماط مُحددة لعدّ هذه الدوال وربطها ببنى توافقية أساسية [1]، [2]، [3]. كما تم تسليط الضوء على أبرز السمات العامة للدوال الرتيبة وتعريفاتها ضمن هذا الإطار [4].

ومع تقدم نظريات العدَ، برزت أهمية دراسة السلوك التقاربي للمقادير التوافقية في العدَ عند يكون المجال كبيراً أو يكون عدد لا نهائي، حيث تُستخدم أساليب المتطورة لفهم الزيادة التي تتم في المجالات الكبيرة (النطاق) [5]. وفي هذا السياق، يُعد تقريب ستيرلنغ المفهوم الرئيسي لتقريب قيم العوامل وتحليل النمو الأسي للتراكيب التوافقية [6].

كما تناولت الدراسات الحديثة بعض الجوانب المتقدمة المتعلقة بالدوال الرتيبة وتمثيلاتها، مما يعكس استمرار الاهتمام البحثي بهذا المجال [7].

وانطلاقًا من هذه الخلفية النظرية، وفي هذا البحث ركزنا على دراسة أنواع خاصة من الدوال المعرّفة على مجموعات منتهية، مع التركيز على الدوال غير المتناقصة، ومقارنة عددها بأنواع أخرى من الدوال. كما يسعى إلى اشتقاق صيغ دقيقة لعدّ هذه الدوال، وتحليلها التقاربي عندما تكون المجموعات غير منتهية، بالاعتماد على أدوات التوافقيات والتحليل التقاربي.

لنفرض أن لدينا سلسلتين $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ الدالة $f: A \to B$ تكون متزايدة بإطراد إذا كان $a_i < a_j$ فإن $f(a_i) < f(a_j)$

الدالة fتحدد بإختيار m عنصر مميز من B بحيث تكون مرتبة بنفس عناصر A.

عدد طرق إختيار m عنصر من المجموعة B **هو:**

$$\binom{m+1}{m} = \frac{(m+1)m!}{m!(m+1-m)!} = m+1$$

كل مجموعة جزئية بها mمن العناصر المختلفة يحدد دالة واحدة فقط أي انه لا يمكن إيجاد دالتين مختلفتين لهما نفس الصور.

الأن: نريد إيجاد عدد الدوال الغير متناقصة من المجموعة A والتي بها m عنصر إلى المجموعة B و التي بها $m+1$ عنصر ونقصد بأن الدالة $f: A \to B$ غير متناقصة Non-decreasingهو أنه إذا كان $a_i < a_j$ في A فإن$f(a_i) \leq f(a_j)$ لتكن $\{x_i\}_{i=1}^{m+1}$ أعداداً غير سالبة أي أن $x_i \geq 0$ لكل i=1,2,,…,m+1

بحيث يكون مجموع عناصر هذه المجموعة هو عدد عناصر النطاق أي أن:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1} = m$$

حيث x_1 عدد عناصر A التي إلي أرسلت إلى b_1 و x_2 عدد عناصر A التي إلي أرسلت إلي b_2 و هكذا باقي العناصر x_i لكل واحد منها عدد صحيح غير سالب (قد يكون صفراً) **وبالتالي المجموع الكلي:**

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1} = m$$

ألأن: نريد أن نحسب عدد الحلول لهذه المعادلة وهي مسألة معروفة في التوافيق بمسألة النجوم و العوارض (Stars and Bars) فإذا كان لدينا mمن النجوم تمثل عناصر المجموعة A ونريد تقسيمها إل ي (m+1) من الخانات والتي تمثل قيم المدي $b_1, b_2, \dots, b_m$ و لفصل هذه الخانات نحتاج إلي m من العوارض أو الفواصل .

كل ترتيب من النجوم والعوارض يمثل دالة غير متناقصة، وعليه عدد كل الطرق الممكنة لترتيب m من النجوم و m من الفواصل هو بالضبط جميع السلاسل التي يحتوي علي 2m , التي نختار منها m في كل مرة و عليه $\binom{2m}{m}$ هو عدد الدوال **نلاحظ أن عدد الدوال الغير متناقصة أكبر من عدد الدوال المتزايدة بإطراد لان:**

$$\binom{2m}{m} > m+1 \quad \text{لكل } m > 1 .$$

الأن: نريد حساب عدد الدوال الغير متناقصة عندما تكبر m بشكل كبير، **نعلم أن:**

$$\sum_{n=0}^{2m} \binom{2m}{n} = 2^{2m} = 4^m$$

وعليه فإن:

$$\binom{2m}{m} \geq \frac{4^m}{(2m+1)}$$

الان بأخذ الجذر m لطرفي المتباينة السابقة **نجد:**

$$\left(\binom{2m}{m}\right)^{\frac{1}{m}} \geq \frac{4}{(2m+1)^{\frac{1}{m}}}$$

وعليه يكون:

$$\lim_{m\to\infty}\inf\left(\binom{2m}{m}\right)^{\frac{1}{m}} \geq 4 \qquad \rightarrow \ (1)$$

وبما أن $\binom{2m}{m}$ لا يمكن أن يكون أكبر من مجموع المعاملات 4^m ، **يكون لدينا أيضاً:**

$$\binom{2m}{m} < 4^m$$

ومنها نحصل علي:

$$\left(\binom{2m}{m}\right)^{\frac{1}{m}} \leq 4$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\lim_{m\to\infty}\sup\left(\binom{2m}{m}\right)^{\frac{1}{m}} \leq 4 \rightarrow \ (2)$$

من المتباينة (1) والمتباينة (2) وبدمجهما معاً **نحصل على:**

$$\lim_{m\to\infty}\left(\binom{2m}{m}\right)^{\frac{1}{m}} = 4$$

وهذا يدل على أن $\binom{2m}{m}$ ينمو أسياً بمعدل أساسي 4^m . وبتطبيق تقريب ستيرلنغ للعامل m! نحصل على صيغة أكثر دقة **وهي:**

$$\binom{2m}{m} \sim \frac{4^m}{\sqrt{\pi m}} \quad , \qquad m \to \infty$$

- نلاحظ أن عدد الدوال الغير متناقصة أكبر بكثير من عدد الدوال المتزايدة بإطراد وأيضاً عدد الدوال الغير متناقصة يساوي عدد الدوال الغير متزايدة كذلك عدد الدوال المتزايدة بإطراد يساوي عدد الدوال المتناقصة بإطراد.
- عدد الدوال المتزايدة بإطراد وعدد الدوال الغير متناقصة عدد الصغير بالنسبة لعدد كل الدوال بين المجموعتين.

الآن: نريد إيجاد نسبة بين عدد الدوال الأحادية وعدد الدوال الأحادية المحافظة على الترتيب بين سلسلتين، في حالة n=m فإنه يوجد دالة واحدة فقط أحادية و محافظة علي الترتيب، وفي حالة أن $n \leq m$ **هي:**

$$\frac{\frac{m!}{(m-n)!\,n!}}{\frac{m!}{(m-n)!}} = \frac{\text{عدد الدوال الأحادية المحافظة الترتيب}}{\text{عدد الدوال الأحادية}}$$

وبذلك:

$$\frac{1}{n!} = \frac{\text{عدد الدوال الأحادية المحافظة الترتيب}}{\text{عدد الدوال الأحادية}}$$

إذن النسبة هي $n!$ 1:

نتيجة:

إذا كانت عدد الدوال الأحادية كبير جداً فان عدد الدوال المحافظة على الترتيب يكون ضئيلا جدا، **بمعني اخر:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}\right) = 0$$

الخلاصة والتوصيات:

تُعد الدوال من المفاهيم الأساسية في مجالات الرياضيات، حيث تشكّل منظوراً رئيساً لدراسة العلاقات بين المجموعات. في هذا البحث، تمت دراسة أنواع خاصة من الدوال المعرفة على مجموعات منتهية، مع مقارنة هذه الأنواع

من حيث العدد والبنية التوافقية. كما تم إستنتاج صيغة لمعرفة عدد الدوال غير المتناقصة، واستخدامنا في اشتقاقها تقريب ستيرلنغ،مما جعلنا نستنتج صيغة دقيقة لنموها عندما يكون المجال كبيراً جداً.

يمكن توسيع هذا البحث في دراسة أنواع أخرى من أنواع الدوال، من أهمها دراسة الدوال الفوقية بين مجموعتين منتهيتين، مع إيجاد صيغ رياضية دقيقة تحدد عدد هذه الدوال عندما يكون عدد عناصر المجال مضاعفًا لعدد عناصر المدى. كما يمكن التعمق في دراسة السلوك الحدّي لهذا العدد عند ازدياد حجم المجال بشكل كبير، أي عند اقترابه من اللانهاية، مما قد يكشف عن أنماط نمو جديدة ذات طابع تقاربي.

References:

1- K. H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications, 8th ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill Education, 2019.
2- R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics, Volume 1, 2nd ed. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2011.
3- R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, 2nd ed. Reading, MA, USA: Addison-Wesley, 1994.
4- J. H. van Lint and R. M. Wilson, A Course in Combinatorics, 2nd ed. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2001.
5- H. S. Wilf, Generatingfunctionology, 3rd ed. Natick, MA, USA: A K Peters, 2006.
6- S. Morris, “Tweaking Ramanujan’s Approximation of n!,” Fundamental Journal of Mathematics and Applications, vol. 5, no. 1, 2022.
7- S. Z. Kiss, C. Sándor, and Q.-H. Yang, “On Monotone Increasing Representation Functions,” Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol. 109, no. 2, 2024. doi: 10.1017/S0004972723000679.
8- P. Flajolet and R. Sedgewick, Analytic Combinatorics. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2009.
9- Cormac O'Sullivan “Stirling's Approximation and a Hidden Link Between Two of Ramanujan's Approximations,” Journal of Combinatorial Theory, Series A, vol. 197, Art. no. 105740, 2023.