The North African Journal of Scientific Publishing (NAJSP)
مجلة شمال إفريقيا للنشر العلمي (NAJSP)
E-ISSN: 2959-4820
Volume 4, Issue 3, 2026
Page No: 123-128
Website: https://najsp.com/index.php/home/index
SJIFactor 2024: 5.49 **معامل التأثير العربي (AIF) 2025: 0.69** **ISI 2024: 0.696**

Solving the Volterra Integrative Differential Equation

Hamida Ali Shafter[1*], Sumaia Rajab Rafieda[2]
[1,2]Faculty of Education, Misurata University, Misurata, Libya

حل معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية

حميدة علي شفتر[1*]، سمية رجب رفيدة[2]
[1،2]كلية التربية، جامعة مصراتة، مصراتة، ليبيا

*Corresponding author: h.shafter@edu.misuratau.edu.ly

Received: April 25, 2026	Accepted: July 03, 2026	Published: July 17, 2026

Copyright: © 2026 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Abstract:
Volterra integrative differential equation are among the most important mathematical equations encountered in a wide range of scientific and engineering applications. They combine differential and integral operators within a single mathematical model, making their solution a challenging task in many practical problems. This study aims to review and analyze three of the most widely used method for solving Volterra integrative differential equations, namely Adomian, Decomposition Method, Laplace Transform Method, Series Method. The theoretical foundation to illustrative examples, the study demonstrates that the choice of the nature of the equation and its associated initial conditions.

Keywords: Integrative Differential Equation, Volterra Integrative differential Equation, Adomian, Decomposition Method- Laplace Transform Method, Series Method.

الملخص:
تعد معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية من المعادلات الرياضية المهمة التي تظهر في العديد من التطبيقات العلمية والهندسية إذ تجمع بين المشتقات والتكامل في نموذج رياضي واحد مما يجعل حلها تحديا في كثير من المسائل التطبيقية. تهدف هذه الدراسة الي استعراض وتحليل ثلاث من أكثر الطرق شيوعا في حل معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية وهي طريقة تحليل ادوميان وطريقة تحليل لابلاس وطريقة المتسلسلات. وقد تم عرض الأسس النظرية لكل طريقة مع تطبيقها على امثلة توضيحية. وتبين الدراسة ان اختيار طريقة الحل يعتمد على طبيعة المعادلة وشروطها الابتدائية.

الكلمات المفتاحية: المعادلة التكاملية التفاضلية، معادلة فوليترا التكاملية التفاضلية، طريقة تحليل ادوميان، طريقة تحويل لابلاس، طريقة المتسلسلة.

المقدمة:

تعد معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية من الموضوعات المهمة في الرياضيات التطبيقية , لما لها من دور بارز في العديد من الظواهر الفيزيائية و الهندسية و البيولوجية و الاقتصادية و تمثل هذه المعادلات امتداد للمعادلات التفاضلية و التكاملية حيث تتضمن الدالة المجهولة و مشتقاتها داخل و خارج إشارة التكامل مما يجعلها اكثر تعقيدا و يستلزم استخدام طرق تحليلية متقدمة لإيجاد حلولها .و من ابرز الطرق التحليلية المستخدمة لحل معادلة فوليترا التكاملية التفاضلية طريقة تحليل ادوميان و طريقة تحويل لإبلاس و طريقة المتسلسلة. تهدف هذه الورقة الي عرض المبادئ الأساسية لهذه الطرق الثلاث وبيان الية تطبيق كل منها على معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية من خلال امثلة توضيحية.

معادلة فوليتيرا التكاملية[1]

وهي معادلة تكاملية يكون فيها على الأقل أحد حدود التكامل متغير وعاد ةيكون الحد العلوي للتكامل هو المتغير الرئيسي x أي تكون المعادلة على الصورة:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt$$

تسمى $k(x,t)$ نواة المعادلة.

المعادلات التكاملية- التفاضلية:[2]

المعادلة التكاملية-التفاضلية هي معادلة توجد فيها الدالة المجهولة $u(x)$ كمشتقة عادية وتظهر تحت أو خارج إشارة التكامل في المعادلة وعادة ما تكون على الصورة التالية:

$$u^n(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt$$

معادلات فوليتيرا التكاملية التفاضلية:[3]

تظهر معادلات فوليتيرا التكاملية التفاضلية عندما نقوم بتحويل مسائل قيمة ابتدائية إلى معادلات تكاملية. وتحتوي معادلة فوليتيرا التكاملية التفاضلية على الدالة المجهولة $u(x)$ وأحد مشتقاتها $(n)(x),\ n \geq 1$ داخل وخارج إشارة التكامل ويكون على الأقل أحد حدود التكامل متغير كما في معادلات فوليتيرا التكاملية وتكون معادلة فوليتيرا التكاملية التفاضلية على الصورة التالية:

$$u^n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u(t)dt$$

طرق حل معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية:

طريقة التحلل الأودميان[4]

تعطى طريقة التحلل الأودميان الحل في صورة سلسلة لا حصر لها من الحدود التي يمكن تحديدها بشكل مكرر وقد تعطي السلسلة التي تم الحصول عليها الحل الدقيق في حالة تتقارب المتسلسلة إلى دالة معينة وقد يكون الحل حلًا تقريبياً فقط .نفرض أن المعادلة التكاملية التفاضلية المطلوب إيجاد حلها على الصورة التالية:

$$u''(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u(t)dt$$

$$u(0) = a_0\ , u'(0) = a_1$$

نكامل طرفي المعادلة مرتين نحصل على:

$$u(x) = a_0 + a_1 x + l^{-1}\big(f(x)\big) + l^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u(t)\,dt\right)$$

$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ هو عامل التكامل ثم نستخدم سلسلة التحلل l يتم استخدام الشروط الابتدائية، وبمقارنة المعادلتين:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = a_0 + a_1 x + l^{-1}\big(f(x)\big) + l^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u(t)\,dt\right)$$

بالتالي نحصل على علاقة التكرار:

$$u_0(x) = a_0 + a_1 x + l^{-1}\big(f(x)\big)$$

$$u_{k+1}(x) = l^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u(t)\,dt\right), k \geq 0$$

حيث يتم تعريف المكون الصفري $u_0(x)$ بجميع المصطلحات غير المدرجة داخل إشارة التكامل بعد تحديد المكونات $u_i(x)\ , i \geq 0$.

يتم بعد ذلك الحصول على الحل $u(x)$ في صورة سلسلة وباستخدام تقارب المتسلسلة نحصل على المتحصل عليها نصل الي الحل الدقيق في حالة وجود هذا الحل.

مثال: استخدم طريقة أودميان لحل المعادلة:

$$u''(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$u(0) = u'(0) = 1$$

الحل: نستخدم:

$$l^{-1}(f(x)) = \int_0^x \int_0^x f(x)\, dxdy$$

$$u(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + l^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u(t)\, dt\right)$$

$$u_0(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$$

$$u_1(x) = l^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u_0(t)\, dt\right)$$

$$= \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

$$u(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

يكون الحل الدقيق:

$$u(x) = e^x$$

طريقة تحويل لابلاس[4]

يتم استخدام طريقة تحويل لابلاس لحل معادلات فوليتيرا التكاملية من النوع الأول والثاني إذا كانت نواة المعادلة $k(x,t)$ (دالة فوقية) ويمكن التعبير عن المعادلة التفاضلية التكاملية كالتالي:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u(t)dt$$

يحققان الشروط المطلوبة لايجاد تحويل لابلاس لكل منهما ويكون كالتالي $\boldsymbol{f_1(x), f_2(x)}$ وهناك:

$$L\{f_1(x)\} = f_1(s)\,, \qquad L\{f_2(x)\} = f_2(s)$$

$$(f_1 \times f_2)(x) = \int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt$$

$$(f_2 \times f_1)(x) = \int_0^x f_2(x-t)f_1(t)dt \qquad \text{أو}$$

$$(f_1 \times f_2)(x) = (f_2 \times f_1)(x) \qquad \text{حيث أن}$$

ويكون التحويل اللابلاسي على$(\boldsymbol{f_1 \times f_2})(\boldsymbol{x})$ كالتالي:

$$L\{(f_1 \times f_2)(x)\} = L\left\{\int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt\right\} = f_1(s)f_2(s)$$

حل معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية باستخدام طريقة تحويل لابلاس من الضروري استخدام تحويلات لابلاس للمشتقات وهي كالاتي:**[5]**

$$L\{u^{(n)}(x)\} = s^n L\{u(x)\} - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \cdots - u^{(n-1)}(0)$$

حيث ان:

$$L\{u'(x)\} = sL\{u(x)\} - u(0)$$

$$L\{u''(x)\} = s^2L\{u(x)\} - su(0) - u'(0) = s^2u(s) - su(0) - u'(0)$$

$$L\{u'''(x)\} = s^3L\{u(x)\} - s^2u(0) - su'(0) - u''(0)$$

$$= s^3u(s) - s^2u(0) - su'(0) - u''(0)$$

$$L\{u^{(4)}(x)\} = s^4L\{u(x)\} - s^3u(0) - s^2u'(0) - su''(0) - u'''(0)$$

$$= s^4u(s) - s^3u(0) - s^2u'(0) - su''(0) - u'''(0)$$

مثال: استخدم طريقة تحويل لابلاس لحل معادلة فوليتيرا التفاضلية التكاملية:

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt \qquad , u(0) = 1$$

الحل:

نجد النواة $k(x,t)=1$

نأخذ تحويل لابلاس للطرفين:

$$L\big(u'(x)\big)=L(1)+L\big(1*u(x)\big)$$
$$s\,U(s)-u(0)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s}U(s)$$
$$U(s)=\frac{1}{s-1}$$

نأخذ تحويل لابلاس العكسي للطرفين يتم الحصول على:

$$u(x)=e^{x}$$

مثال: استخدم طريقة تحويل لابلاس لحل المعادلة:

$$u''(x)=-1-x+\int_0^x (x-t)u(t)dt$$
$$u(0)=1 \qquad u'(0)=1$$

نجد النواة $k(x,t)=(x-t)$

نأخذ تحويل لابلاس للطرفين:

$$L\big(u''(x)\big)=-L(1)-L(x)+L\big((x-t)*u(x)\big)$$
$$s^2\,U(s)-su(0)-u'(0)=\frac{-1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}U(s)$$

نستخدم الشروط الابتدائية نحصل على:

$$U(s)=\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}$$
$$u(x)=\sin x+\cos x$$

طريقة المتسلسلات[6]

الدالة الحقيقية $u(x)$ تسمى تحليلية إذا كانت تحتوي على مشتقات من جميع الرتب.

متسلسلة تايلور عند أي نقطة تعرف كالاتي:**[7]**

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)$$

سنطبق طريقة المتسلسلات لحل معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية ونفرض ان الحل $u(x)$ لمعادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية:

$$u^{(n)}(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x,t)u(t)dt$$
$$u^{(k)}(0)=ka_k \quad ,0\le k\le(n-1)$$

يمكن تحديد المعاملات a بشكل متكرر ويمكن تحديد المعاملات الأولى من الشروط:

$$a_0=u(0)\,,a_1=u'(0)\,,a_2=\frac{1}{2!}u''(0),\dots\dots$$

نطبق طريقة حل المتسلسلة على معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية:

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\Big)^{(n)}=T\big(f(x)\big)+\lambda\int_0^x k(x,t)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\Big)\,dt$$

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)^{(n)} = T\big(f(x)\big) + \lambda \int_0^x k(x,t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots)dt$$

حيث $T\big(f(x)\big)$ هي متسلسلة تايلور ل $f(x)$.

يتم ضم الجانب الأيمن من التكامل في المعادلة السابقة وتجمع معاملات القوى المتشابهة x في كلا الطرفين للمعادلة الناتجة حيث سيتم حل السلسلة مباشرة بعد استبدال المعاملات المشتقة في المعادلة.

مثال: استخدم السلسلة لحل معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية:

$$u''(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)u(t)dt$$
$$u(0) = \ u'(0) = 1$$

الحل: نستخدم المتسلسلة $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نستبدل $\boldsymbol{u(x)}$ في المعادلة:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'' = 1 + x + \int_0^x \left((x-t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)} a_n x^{n+2}$$

$$2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} a_{n-1}x^n$$

باستخدام الشروط الابتدائية:

$$a_0 = 1\,, a_1 = 1\,, a_2 = \frac{1}{2!}\,, a_3 = \frac{1}{3!}$$
$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)n(n-1)} a_{n-2} \quad , n \geq 2$$
$$a_n = \frac{1}{n!}$$

نحصل على المتسلسلة $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ والتي تتقارب الي $u(x) = e^x$

مثال: استخدم طريقة المتسلسلة لحل المعادلة:

$$u'''(x) = 1 - x + 2\sin x - \int_0^x (x-t)u(t)dt$$
$$u(0) = \ u'(0) = 1 \ , u''(0) = -1$$

نستخدم المتسلسلة $u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)''' = 1-x+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\int_0^x\left((x-t)\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n\right)dt$$

$$6a_3+24a_4x+60a_5x^2+120a_6x^3+\cdots = 1+x-\frac{a_0}{2}x^2-\left(\frac{1}{3}+\frac{a_0}{6}\right)x^3+..$$

باستخدام الشروط الابتدائية:

$$a_0=1\,,a_1=-1,a_2=\frac{-1}{2!}\,,a_3=\frac{1}{3!}\,,a_4=\frac{1}{4!},\qquad a_5=\frac{-1}{5!}$$

$$\mathrm{u(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

تتقارب الي الحل $u(x)=\cos x-\sin x$

الخاتمة:

تناولت هذه الورقة معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية باعتبارها من المعادلات المهمة في الرياضيات التطبيقية لما لها من تطبيقات واسعة في العديد من المجالات العلمية والهندسية وقد تم استعراض ثلاث من أبرز الطرق التحليلية المستخدمة في حل هذه المعادلات ة هي طريقة تحليل ادوميان وطريقة تحويل لابلاس وطريقة المتسلسلات مع توضيح الأساس النظري لكل منها وتطبيقها على امثلة توضيحية.

وقد أظهرت الدراسة ان كفاءة اختيار طريقة الحل يعتمد على طبيعة المعادلة ونوع النواة والشروط الابتدائية المصاحبة لها. كما تبين ان هذه الطرق توفر حلولا دقيقة او تقريبية ذات كفاءة عالية مما يجعلها أدوات فعالة في دراسة المعادلات التكاملية التفاضلية.

المراجع والمصادر:

1. هشام زوان رشيد، محمد إبراهيم الطويل، المعادلات التكاملية، 2022، مطبعة النبراس طرابلس
2. عجيلي ميلاد العجيلي، المعادلات التكاملية (نسخة ابتدائية) 2014م.
3. Abdul-majid Wazwaz, Linear Integral equations methods and application, Sait Xavier university Chicago. USA. 2011.
4. Abdul-majid Wazwaz, A first course Integral equations,second edition, 2015.
5. Murray R.Spiegel , applied differential equations ,3rd edition, 1980
6. A Karamete&M SEzer , ATaylor collocation method for solution of linear integro-differential equations,International journal of computer mathematics ,2010.
7. Sudhanshu-Aggarwal, Taylor series method for solution of Volterra integral equation, 2020, Amazon digital services LLC-Kdp.