

The North African Journal of Scientific Publishing (NAJSP)

مجلة شمال إفريقيا للنشر العلمي (NAJSP)

EISSN: 2959-4820

Volume 1, Issue 4, October-December 2023, Page No: 79-93

Website: <https://najsp.com/index.php/home/index>

SJIFactor 2023: 3.733 0.63 :2023 (AIF) معامل التأثير العربي ISI 2023: 0.383

مقارنة مقدرات بيبز مع مقدر غير متحيز ذي أقل تباين بانتظام (UMVUE) لمعلمة الشكل لتوزيع لوماكس باستخدام المحاكاة

حنان الحسنني عبد الله*

قسم الرياضيات، كلية العلوم الأصابعة، جامعة غريان، ليبيا

Comparison of Bayes estimators with the uniformly minimum variance unbiased estimator (UMVUE) for the shape parameter of a Lomax distribution using simulation

Hanan ALhosni Abdullah *

Department of Mathematics, College of Science AL-Asabaa, Gharyan University, Libya

*Corresponding author

hananalhosni14@gmail.com

*المؤلف المراسل

تاريخ النشر: 2023-11-21

تاريخ القبول: 2023-11-15

تاريخ الاستلام: 2023-10-02

المخلص

يهدف هذا البحث إلى مقارنة مقدر بيبز تحت دوال خسارة مختلفة مع مقدر غير متحيز ذي أقل تباين بانتظام (UMVUE) لمعلمة الشكل لتوزيع لوماكس ذي المعلمتين (α, β) ، باعتباره أحد التوزيعات المهمة التي تصف أوقات الفشل، إذ أن β هي معلمة القياس المفترض أنها معلومة في هذا البحث و α هي معلمة الشكل المراد تقديرها بتوظيف أسلوب المحاكاة (Simulation) للمقارنة بين طرق التقدير. وقد تمت المقارنة بالاعتماد على متوسط مربعات الخطأ (MSE) لقيم مختلفة لمعلمة الشكل المراد تقديرها وأحجام عينات $(n=10, 25, 50, 100, 200)$ وذلك بغية الوصول لأفضل مقدر لمعلمة الشكل.

وقد أظهرت الدراسة أن مقدرات بيبز تحت دالتي الخسارة (التربيعية الموزونة والخطية الاسية المعدلة) كانت هي الأفضل من بين كل المقدرات وذلك لأنها حققت أقل (MSE) لجميع حجوم العينات وقيم المعالم المقترحة في هذا البحث.

الكلمات المفتاحية: توزيع لوماكس، مقدر بيبز، مقدر (UMVUE)، دالة الخسارة التربيعية الموزونة، دالة الخسارة الخطية الأسية المعدلة.

Abstract

This research aims to compare the Bayes estimator under different loss functions with the uniformly minimum variance unbiased estimator (UMVUE) for the shape parameter of the two-parameter Lomax distribution, as it is one of the important distributions that describes failure times, as it is the measurement parameter that is assumed to be known in this research and it is the shape parameter that is to be estimated by employing a simulation method to compare between estimation methods. The comparison was made based on the mean square error (MSE) for different values of the shape parameter to be estimated and sample

sizes ($n=10, 25, 50, 100, 200$) in order to reach the best estimator for the shape parameter.

The study showed that the Bayes estimators under the weighted quadratic loss function and the modified exponential linear loss function were the best among all the estimators because they achieved the lowest (MSE) for all sample sizes and feature values proposed in this research.

Keywords: Lomax distribution; Bayes estimator; (UMVUE); Weighted quadratic loss function; Modified exponential linear loss function.

1. المقدمة

في الآونة الأخيرة ازداد اهتمام الباحثين والمهتمين بالاستدلال الاحصائي بتقدير المعالم المجهولة للتوزيعات الاحتمالية خاصةً التي تلعب دوراً مهماً في حياتنا اليومية والتي تعرف بتوزيعات الحياة أو توزيعات وقت الفشل. ومن هذه التوزيعات توزيع بايتو الذي يعتبر توزيع لوماكس محل هذه الدراسة نوعاً خاصاً منه حيث يعتبر توزيع لوماكس أحد التوزيعات المستمرة الملائمة في دراسات الموثوقية وأزمة البقاء. كما أن له استخدامات واسعة أخرى في الدراسات ذات العلاقة بالدخل والدراسات المتعلقة بحجم المدن. فضلاً عن كونه نموذج مفيد في دراسة نظرية الطوابير وفي تحليل البيانات المتعلقة بالإحصاء الحيوي (محمد و صابر، 2019).

وباعتبار أن توزيع لوماكس محل الدراسة حالة خاصة من توزيع بايتو من النوع الثاني عندما $\mu = 0$ لذلك كان من الضروري تكوين فكرة عامة عن تقدير معلمة الشكل لتوزيع بايتو من خلال الاطلاع على بعض الدراسات السابقة المتعلقة به كدراسة (خليل، 2012) التي تم فيها مقارنة مقدر بيز المعيارى مع اربعة طرق تقليدية (الامكان الاعظم، العزوم، التقلص، UMVUE) لتقدير معلمة الشكل لتوزيع بايتو ذو المعلمتين، وقد أظهرت النتائج أفضل أسلوب بيز في التقدير على بقية الطرق الأخرى. ودراسة (بدر، 2012) التي هدفت الى تقدير دالة المعولية لتوزيع بايتو من النوع الأول (Pareto Distribution of the First Kind) في حالة توافر معلومات أولية وعدم توافرها عن المعلمات وقد تمت المقارنة بين طرق التقدير الآتية: (طريقة الامكان الاعظم، طريقة العزوم، طريقة المربعات الصغرى، طريقة التقلص) باستخدام المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملية. وقد توصل الباحث إلى افضلية طريقة التقلص في تقدير دالة المعولية مقارنة مع باقي طرق التقدير.

أما عن الدراسات السابقة الخاصة بتوزيع لوماكس فقد قام الباحثان (محمد و صابر، 2019) بتقدير معلمة القياس لتوزيع لوماكس باستخدام طريقة بيز Bayesian Method ومقارنتها مع بعض الطرق التقليدية (طريقة العزوم، الامكان الاعظم) وإجراء المقارنة بين هذه الطرق باستخدام متوسط مربعات الخطأ (MSE) وتوصلاً إلى أن طريقة بيز هي الأفضل من بين هذه الطرق. وفي دراسة (IJAZ, 2021) تم تقدير معلمة الشكل لتوزيع لوماكس باستخدام طريقة بيز في ظل دوال خسارة مختلفة معتمدة على نوعيين من التوزيعات السابقة (التوزيع المنتظم، التوزيع المعتمد على معلومة جيفيري). وأظهرت النتائج أن مقدر بيز تحت دالة الخسارة الموزونة كان الأفضل من بين كل المقدرات. كما قام الباحثون (Kumar et al, 2018) بتقدير دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لوماكس باستخدام مقدر الامكان الاعظم ومقدر غير متحيز بأقل تباين بانتظام (UMVUE) وأظهرت النتائج ان مقدر (UMVUE) كان أكثر فاعلية من مقدر الامكان الاعظم.

كما قد تمت في دراسة (Al-Noor and Saad, 2015) مقارنة مقدرات غير بيزية مع مقدرات بيزية باستخدام أنواع مختلفة للتوزيعات السابقة لمعلمة الشكل لتوزيع لوماكس وقد أظهرت النتائج افضلية المقدر (UMVUE) على بقية المقدرات غير البيزية وأفضلية المقدرات البيزية على المقدرات الغير بيزية في بعض دوال الخسارة والتوزيعات السابقة المستخدمة في الدراسة.

وقد تم في هذا البحث اتباع المنهج التحليلي الاستنتاجي باعتباره انسب المناهج توافقاً مع طبيعة البحث، بالإضافة إلى استخدام الصيغ الرياضية "الإحصاء الرياضي" في اشتقاق بعض الخواص

الأساسية التي يتميز بها هذا التوزيع والتي تساعد في تحقيق هدف البحث الأساسي المتمثل في الحصول على أفضل تقدير لمعلمة الشكل لتوزيع لوماكس وذلك من خلال المقارنة بين طرق التقدير (مقدر غير متحيز بأقل تباين بانتظام، مقدر ببيز) لمعلمة الشكل لتوزيع لوماكس وذلك باستخدام أسلوب مونت كارلو للمحاكاة في توليد بيانات العينات العشوائية اللازمة لذلك.

وتحقيقاً لهدف البحث قُسم إلى ثلاثة مباحث، خصص المبحث الأول منه لمقدمة البحث متضمنة منهجية البحث والهدف من البحث وأهميته والاستعراض المرجعي لبعض البحوث والدراسات ذات العلاقة بموضوع البحث، في حين يتضمن المبحث الثاني الجانب النظري الذي تم فيه عرض دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لوماكس محل الدراسة واشتقاق بعض خواصه الأساسية وكذلك تقدير معلمة الشكل لتوزيع لوماكس باستخدام طريقتان (طريقة كلاسيكية وهي الحصول على مقدر غير متحيز بأقل تباين بانتظام ، وطريقة حديثة متمثلة في مقدر ببيز تحت ثلاثة أنواع من دوال الخسارة)، أما المبحث الثالث فخصص إلى الجانب التجريبي، إذا تناول تطبيق أسلوب محاكاة مونت- كارلو (Monte_ carlo) للمقارنة بين الطرق التي تمت دراستها في الجانب النظري. وأخيراً تم استعراض أهم الإستنتاجات والتوصيات التي توصل إليها البحث.

2. توزيع لوماكس Lomax Distribution

1.2 دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لوماكس.

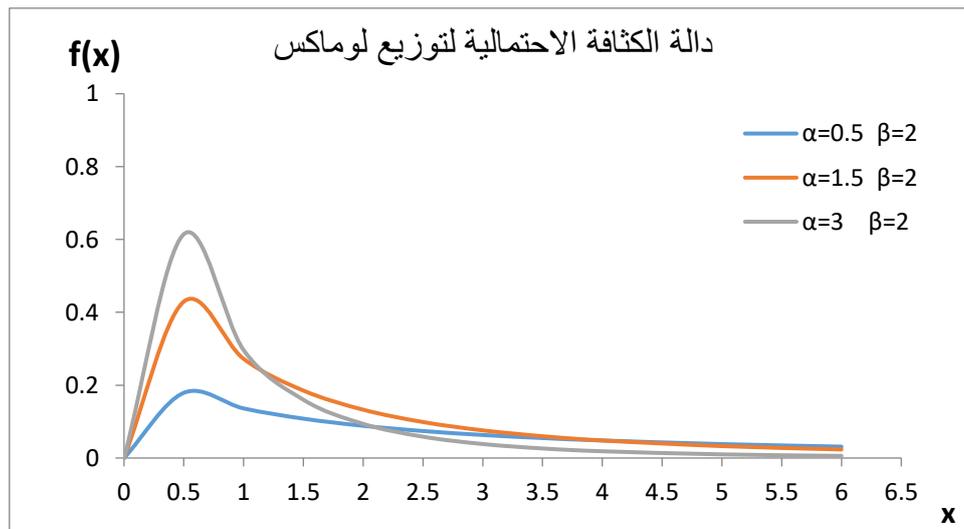
The Probability Density Function of Lomax Distribution (pdf).

يقال إن X متغير عشوائي يتبع توزيع لوماكس بمعلمتين (α, β) ويرمز له بالرمز $X \sim \text{Lomax}(\alpha, \beta)$ إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) معرفة كالآتي:

$$f_x(X; \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta} \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-(\alpha+1)} \quad ; \quad x > 0; \quad \alpha, \beta > 0 \quad \dots (1)$$

حيث أن α تمثل معلمة الشكل و β تمثل معلمة القياس (محمد و جبارة، 2021، صفحة 456).

ودالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لوماكس تأخذ أشكال مختلفة باختلاف قيم كل من المعلمتين (β, α) ولتوضيح مدى تأثير معلمة الشكل (α) محل الدراسة في هذا البحث تحديداً على الشكل العام لتوزيع لوماكس تم تثبيت قيمة معلمة القياس عند $(\beta = 2)$ مع تغيير قيمة معلمة الشكل $(\alpha = 0.5, 1.5, 3)$.



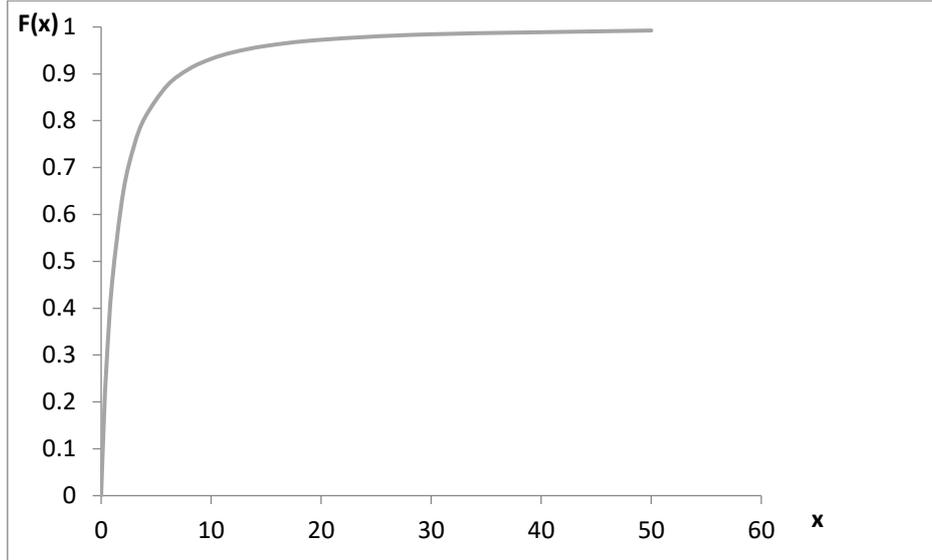
شكل (1): منحنى دالة الكثافة لتوزيع لوماكس عند قيم مختلفة لـ α .

2.2 دالة التوزيع التراكمي لتوزيع لوماكس:

Cumulative Distribution Function (CDF)

$$F_x(X) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{\alpha}{\beta} \left(1 + \frac{u}{\beta}\right)^{-(\alpha+1)} du$$

$$= 1 - \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha} \quad \dots (2)$$



شكل (2): منحنى دالة التوزيع التراكمي لتوزيع لوماكس.

3.2 دالة الامكان الأعظم لتوزيع لوماكس

The likelihood function of the Lomax distribution

إذا كان لدينا عينة عشوائية $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ تتوزع وفقاً لتوزيع لوماكس حسب المعادلة (1) فإن دالة الامكان الاعظم هي:

$$L(x; \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha}{\beta} \left(1 + \frac{x_i}{\beta}\right)^{-(\alpha+1)} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{x_i}{\beta}\right)^{-(\alpha+1)} \quad \dots (3)$$

4.2 الخصائص الأساسية لتوزيع لوماكس

Basic properties of the Lomax distribution

نظرية (1):

إذا كان X متغير عشوائي يتوزع وفق توزيع لوماكس بمعلمتين (α, β) فإن:

$$\mu'_r = E(X^r) = \frac{\beta^r \Gamma(r+1) \Gamma(\alpha-1)}{\Gamma \alpha}$$

$$\mu_x = \frac{\beta}{\alpha-1} \quad ; \quad \alpha > 1$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \quad ; \alpha > 2$$

البرهان:

من تعريف القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المتصل نجد أن:

$$E(X^r) = \int_0^\infty x^r \frac{\alpha}{\beta} \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-(\alpha+1)} dx$$

$$\text{let } y = \frac{x}{\beta} \Rightarrow x = \beta y$$

$$\Rightarrow dx = \beta dy$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 ; \quad x = \infty \Rightarrow y = \infty$$

$$\begin{aligned} \therefore E(X^r) &= \int_0^\infty (\beta y)^r \frac{\alpha}{\beta} (1 + y)^{-(\alpha+1)} \beta dy \\ &= \alpha\beta^r \int_0^\infty y^r (1 + y)^{-(\alpha+1)} dy \end{aligned}$$

باستخدام تكامل بيتا من النوع الثاني:

$$\beta(a, b) = \int_0^\infty x^{a-1} (1 + x)^{-(a+b)} dx = \frac{\Gamma a \Gamma b}{\Gamma(a+b)}$$

فإن

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \alpha\beta^r \beta(r + 1, \alpha - r) \\ &= \frac{\alpha\beta^r \Gamma(r+1)\Gamma(\alpha-r)}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

$$\therefore E(X^r) = \frac{\beta^r \Gamma(r+1)\Gamma(\alpha-r)}{\Gamma(\alpha)} \quad \dots (4)$$

بعد إيجاد العزم اللامركزي الرائي للمتغير العشوائي X فيكون من السهل إيجاد العزم اللامركزي الأول وذلك بالتعويض عن قيمة $r = 1$ في المعادلة (4) كما يلي:

$$\mu'_1 = \mu_x = E(X) = \frac{\beta}{\alpha-1} \quad ; \alpha > 1 \quad \dots (5)$$

وبالتعويض عن قيمة $r = 2$ في المعادلة (4) نحصل على العزم اللامركزي الثاني.

$$\mu'_2 = E(X^2) = \frac{2\beta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} \quad ; \alpha > 2 \quad \dots (6)$$

وباستخدام المعادلة (5) والمعادلة (6) يكون تبين توزيع لوماكس كالتالي:

$$\sigma_x^2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\beta^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \quad ; \alpha > 2 \quad \dots (7)$$

3. تقدير معلمة الشكل لتوزيع لوماكس

Shape parameter estimation of the Lomax distribution.

هناك عدة طرق تُستخدم للحصول على التقدير بنقطة لمعلمة التوزيع المجهولة المراد تقديرها. تتصف بكل أو بعض صفات المقدرات الجيدة.

سيقتصر هذا البحث على طريقة كلاسيكية وهي اشتقاق مقدر غير متحيز بأقل تباين بانتظام (UMVUE) ومقارنتها بطريقة حديثة وهي مقدر بيبز الذي يعتمد على معلومات فيشر كمعلومات أولية للمعلمة α المراد تقديرها تحت ثلاثة أنواع من دوال الخسارة.

1.3 مقدر بيبز (BE) Bayes estimator

تقوم فكرة تقدير بيبز على أن هناك معلومة سابقة حول المعلمة المراد تقديرها بحيث يتم دمجها مع معلومات العينة الحالية والمتمثلة بدالة الامكان الأعظم للحصول على التوزيع اللاحق، وبعد إيجاد التوزيع اللاحق يتم تحديد دالة الخسارة، ومن ثم يتم الحصول على مقدر بيبز وذلك بتصغير دالة الخسارة المتوقعة طبقاً للتوزيع الشرطي للمعلمة (موسى وحسن، 2019، صفحة 386).

- دالة الخسارة Loss Function

تختلف التقديرات البيزية تبعاً لاختلاف أنواع دوال الخسارة التي يعد توفرها ضروري على العكس من الأساليب الأخرى لتقدير معلمة ما بهدف الحصول على مقدر بيبز تكون عنده الخسارة (المتوقعة اللاحقة أقل ما يمكن). وتعد دالة الخسارة مقياس لمقدار الخسارة الناتجة من اتخاذ القرار الذي يعتمد على مقدر بيبز (العبادي، 2021، صفحة 26).

وقد تم اعتماد ثلاثة أنواع من دوال الخسارة في هذا البحث هي:

$$1) \ell_1(\hat{\alpha}, \alpha) = (\hat{\alpha} - \alpha)^2 \quad \dots (8)$$

$$2) \ell_2(\hat{\alpha}, \alpha) = \left(\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\alpha}\right)^2 \quad \dots (9)$$

$$3) \ell_3(\hat{\alpha}, \alpha) = \left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}\right)^r - r \ln\left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}\right) - 1, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad \dots (10)$$

فإذا كانت $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ عينة عشوائية من توزيع لوماكس Lomax كما بالمعادلة (1) وأردنا تقدير معلمة الشكل α باستخدام أسلوب بيبز في هذه الحالة فإن التوزيع السابق للمعلمة α سيتم إيجاده من خلال صيغة جيفيري المعتمدة على معلومة فيشير حسب الخطوات التالية:

$$g(\alpha) \propto \sqrt{i(\alpha)}$$
$$g(\alpha) = K\sqrt{i(\alpha)} \quad \dots (11)$$

حيث أن $i(\alpha)$ تمثل معلومة فيشير Fisher information وهي:

$$i(\alpha) = -E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}\right) = \frac{n}{\alpha^2}$$

وبذلك يكون التوزيع السابق كما يلي:

$$g(\alpha) = K \frac{\sqrt{n}}{\alpha} \quad \dots (12)$$

وبدمج معادلة الامكان الاعظم (3) مع المعلومات السابقة لمعلمة الشكل α المتمثلة في التوزيع السابق (12) نحصل على التوزيع اللاحق كما يلي:

$$h(\alpha \setminus \underline{x}) = \frac{L(\underline{x}; \alpha, \beta) \cdot g(\alpha)}{\int_0^{\infty} L(\underline{x}; \alpha, \beta) \cdot g(\alpha) d\alpha}$$

$$h(\alpha \setminus \underline{x}) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (1 + \frac{x_i}{\beta})^{-(\alpha+1)} K \frac{\sqrt{n}}{\alpha}}{\int_0^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (1 + \frac{x_i}{\beta})^{-(\alpha+1)} \frac{K \sqrt{n}}{\alpha} d\alpha}$$

ونظراً لصعوبة التعامل مع (حاصل الضرب) سوف نعيد صياغته بصورة تسهل الاجراءات الرياضية وبفرض أن $T = \sum_{i=1}^n \ln(1 + \frac{x_i}{\beta})$ كما يلي:

$$h(\alpha \setminus \underline{x}) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n e^{-(\alpha+1)T} \frac{K \sqrt{n}}{\alpha}}{\int_0^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n e^{-(\alpha+1)T} \frac{K \sqrt{n}}{\alpha} d\alpha}$$

وبإجراء التكامل وبعض الاختصارات الممكنة نحصل على التوزيع اللاحق كما يلي:

$$h(\alpha \setminus \underline{x}) = \frac{T^n}{\Gamma_n} \alpha^{n-1} e^{-\alpha T} \quad \dots (13)$$

بعد الحصول على التوزيع اللاحق (13) سيتم ايجاد تقدير بيبز باستخدام ثلاثة أنواع من دوال للخسارة سألفة الذكر كما يلي:

1- مقدر بيبز تحت دالة الخسارة التربيعية

Bayes estimator under square loss function (BE1)

عند استخدام دالة الخسارة التربيعية (8) وباتباع اسلوب بيبز في التقدير وذلك بتقليل المخاطرة أقل ما يمكن

$$Risk_1 = E(\hat{\alpha} - \alpha)^2 = \int_0^{\infty} (\hat{\alpha} - \alpha)^2 h(\alpha \setminus \underline{x}) d\alpha$$

يكون تقدير بيبز هو عبارة عن القيمة المتوقعة لـ α كما يلي

$$\hat{\alpha}_{BE1} = E(\alpha) = \int_0^{\infty} \alpha h(\alpha \setminus \underline{x}) d\alpha$$

$$= \int_0^{\infty} \alpha \frac{T^n}{\Gamma_n} \alpha^{n-1} e^{-\alpha T} d\alpha = \frac{n}{T}$$

وبذلك يكون تقدير بيبز تحت دالة الخسارة التربيعية هو:

$$\hat{\alpha}_{BE1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 + \frac{x_i}{\beta})} \quad \dots (14)$$

2- مقدر بيز تحت دالة خسارة تربيعية موزونة

Bayes estimator Under the weighted square loss function (BE2)

وللحصول على مقدر بيز تحت دالة الخسارة التربيعية الموزونة (9) سيتم تقليل المخاطرة أقل ما يمكن كما يلي:

$$\begin{aligned} \text{Risk}_2 &= E\left(\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\alpha}\right)^2 = \int_0^{\infty} \left(\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\alpha}\right)^2 h(\alpha|\underline{x}) d\alpha \\ &= \hat{\alpha}^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} h(\alpha|\underline{x}) d\alpha - 2\hat{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} h(\alpha|\underline{x}) d\alpha + \int_0^{\infty} h(\alpha|\underline{x}) d\alpha \\ &= \hat{\alpha}^2 E\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) - 2\hat{\alpha} E\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 1 \end{aligned} \quad \dots (15)$$

ولتقليل الخسارة أقل ما يمكن سنشتق دالة المخاطرة (15) بالنسبة إلى $\hat{\alpha}$ ومساواتها بالصفر فنحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{d\text{Risk}_2}{d\hat{\alpha}} &= 2\hat{\alpha} E\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) - 2E\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0 \\ \hat{\alpha} &= \frac{E\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{E\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)} \end{aligned} \quad \dots (16)$$

ولإيجاد هذه التوقعات

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} h(\alpha|\underline{x}) d\alpha \\ &= \frac{T^n}{\Gamma_n} \int_0^{\infty} \alpha^{n-2} e^{-\alpha T} d\alpha \\ &= \frac{T}{n-1} \end{aligned} \quad \dots (17)$$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} h(\alpha|\underline{x}) d\alpha \\ &= \frac{T^n}{\Gamma_n} \int_0^{\infty} \alpha^{n-3} e^{-\alpha T} d\alpha \\ &= \frac{T^2}{(n-1)(n-2)} \end{aligned} \quad \dots (18)$$

وبالتعويض بـ (17) و(18) في (16) نحصل على تقدير بيز لمعلمة الشكل كما يلي:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{\text{BE2}} &= \frac{n-2}{T} \\ &\text{وبذلك يكون تقدير بيز تحت دالة الخسارة التربيعية الموزونة لمعلمة الشكل كما يلي:} \\ \hat{\alpha}_{\text{BE2}} &= \frac{n-2}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{x_i}{\beta}\right)} \end{aligned} \quad \dots (19)$$

3- مقدر ببيز تحت دالة خسارة خطية أسية معدلة

Bayes estimator of parameter α under Modified Linear Exponential Loss Function (BE3)

للحصول على مقدر ببيز تحت دالة الخسارة الخطية الاسية سنتبع نفس الاسلوب البيزي المتبع في المقدرات البيزية تحت دوال الخسارة السابقة وبذلك تكون دالة المخاطرة:

$$\begin{aligned} \text{Risk}_3 &= E(I_3(\hat{\alpha}, \alpha)) = \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}\right)^r - r \ln \left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}\right) - 1 \right] h(\alpha \setminus \underline{x}) d\alpha \\ &= \hat{\alpha}^r \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^r} h(\alpha \setminus \underline{x}) d\alpha - r \ln \hat{\alpha} \int_0^{\infty} h(\alpha \setminus \underline{x}) d\alpha + r \int_0^{\infty} \ln \alpha h(\alpha \setminus \underline{x}) d\alpha - \int_0^{\infty} h(\alpha \setminus \underline{x}) d\alpha \\ &= \hat{\alpha}^r E\left(\frac{1}{\alpha^r}\right) - \frac{r}{\alpha^r} + rE(\ln \alpha) - 1 \end{aligned} \quad \dots (20)$$

وبتقليل المخاطرة (20) اقل ما يمكن ومساواتها بالصفر $\frac{d \text{Risk}_3}{d\hat{\alpha}} = 0$ نحصل على:

$$\hat{\alpha}^r = \left[E\left(\frac{1}{\alpha^r}\right) \right]^{-1} \quad \dots (21)$$

وحيث أن:

$$E\left(\frac{1}{\alpha^r}\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^r} h(\alpha \setminus \underline{x}) d\alpha$$

وبعد القليل من الخطوات البسيطة نحصل على:

$$\hat{\alpha}_{\text{BE3}} = \frac{1}{T} [(\Gamma(n))/(\Gamma(n-r))]^{\frac{1}{r}} \quad \dots (22)$$

وبذلك يأخذ مقدر ببيز تحت دالة الخسارة الخطية الأسية المعدلة صور مختلفة تختلف باختلاف قيم r فمثلا عندما $r = 1$

$$\hat{\alpha}_{\text{BE3},1} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{x_i}{\beta}\right)} \quad \dots (23)$$

وعندما $r = 2$ يكون مساوي:

$$\hat{\alpha}_{\text{BE3},2} = \frac{\sqrt{(n-1)(n-2)}}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{x_i}{\beta}\right)} \quad \dots (24)$$

وعندما $r = 3$ يكون مساوي:

$$\hat{\alpha}_{\text{BE3},3} = \frac{\sqrt[3]{(n-1)(n-2)(n-3)}}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{x_i}{\beta}\right)} \quad \dots (25)$$

وهكذا لباقي قيم r

2.3 مقدر غير متحيز بأقل تباين بانتظام لمعلمة الشكل لتوزيع لوماكس.

Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator (UMVUE)

نظرية (2): بفرض أن $X \sim \text{Lomax}(\alpha, \beta)$ ، وكان $t_i = \ln(x_i)$ له توزيع اسي بالمعلمة α وايضا $T = \sum_{i=1}^n t_i$ سيتبع توزيع جاما بالمعلمتين (n, α) فإن (UMVUE) لمعلمة الشكل لتوزيع لوماكس هو

$$\hat{\alpha} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n \ln(1 + \frac{x_i}{\beta})}$$

برهان:

بالاستناد على نظرية (Lemann And Scheffe) (البوزيدي، 2000، صفحة 101) يمكننا الحصول على (UMVUE) حسب تسلسل الخطوات التالية:

1- البحث عن مقدر كافي وكامل لتوزيع لوماكس

حيث أن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لوماكس (1) يمكن اعادة صياغتها على الصورة:

$$f(X; \alpha, \beta) = a(\alpha) b(x) e^{c(\alpha) d(x)} \\ = \frac{\alpha}{\beta} e^{-\ln(1+\frac{x}{\beta})} e^{-\alpha \ln(1+\frac{x}{\beta})}$$

$$a(\alpha) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad b(x) = e^{-\ln(1+\frac{x}{\beta})}, \quad c(\alpha) = -\alpha, \quad d(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{\beta}\right) \quad \text{بحيث يكون:}$$

إذاً يمكن اعتبار توزيع لوماكس يتبع الاسرة الاسية وبناءً على ذلك يكون:

$$T = \sum_{i=1}^n d(x_i) = \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{x_i}{\beta}\right) \quad \dots (26)$$

هو مقدر كافي وكامل لتوزيع لوماكس.

2- البحث عن دالة في T بحيث تكون مقدرًا غير متحيز لمعلمة الشكل لتوزيع لوماكس.

بالاستفادة من مقدرات ببيز السابقة باعتبارها دوال في T وحيث أن T يتبع توزيع جاما بالمعلمتين (n, α) نجد أن :

$$E\left(\frac{n}{t}\right) = n \int_0^{\infty} \frac{1}{t} \frac{\alpha^n}{\Gamma n} t^{n-1} e^{-\alpha t} dt \\ = \frac{n}{n-1} \alpha \quad \dots (27)$$

وبذلك يكون:

$$E(T^*) = E\left(\frac{n-1}{t}\right) = \frac{n-1}{n} E\left(\frac{n}{t}\right) = \alpha$$

وحسب نظرية (lehman _ Scheffe) يكون (UMVUE) لمعلمة الشكل لتوزيع لوماكس هو:

$$\hat{\alpha}_{UMVU} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{x_i}{\beta}\right)} \quad \dots (28)$$

ونلاحظ أن مقدر (UMVUE) هو نفس مقدر ببيز تحت دالة الخسارة الاسية الخطية عندما $r = 1$.

4. نموذج المحاكاة Simulation

يخصص هذا المبحث للجانب التجريبي للبحث، وذلك بتوظيف أسلوب المحاكاة (Simulation) لتوليد بيانات عشوائية تتبع توزيع لوماكس ذي المعلمتين محل الدراسة باستخدام طريقة مونت – كارلو (Mont- carlo) وبواسطة هذه البيانات المولدة سيتم إيجاد مقدرات معلمة الشكل (α) لتوزيع لوماكس بطرق التقدير الموضحة بشيء من التفصيل في الجانب النظري لهذا البحث وللوصول إلى أفضل مقدر لمعلمة الشكل سيتم مقارنة هذه المقدرات باستخدام المعيار الاحصائي (MSE) متوسط مربعات الخطأ حيث تم الحصول على نتائج المحاكاة بواسطة برنامج كتب على (MATLAB).

1.4 مراحل تجربة المحاكاة.

تتضمن المحاكاة على مراحل اساسية لتقدير معلمة الشكل لتوزيع لوماكس وهي على التوالي:

- 1) تعيين قيم افتراضية لمعلمتي التوزيع حيث تُبنت قيمة معلمة القياس عند ($\beta=2$) وافترض أكثر من قيمة لمعلمة الشكل ($\alpha = 0.5, 1.5, 3$).
 - 2) اختيار حجوم مختلفة للعينة بشكل يتناسب مع معرفة مدى تأثير حجم العينة على دقة وكفاءة النتائج المتحصلة عليها من طرق التقدير المستخدمة في هذا البحث، حيث تم اخذ عينتان صغيرتان ($n=10, 25$) عينة متوسطة ($n=50$) وعينة كبيرة ($n=100$) وعينة كبيرة جدا ($n=200$).
 - 3) اختيار حجم التكرار كل تجربة ($R=5000$) لتقليل نسبة الخطأ.
 - 4) توليد بيانات عشوائية تتبع توزيع لوماكس ذي المعلمتين باستخدام طريقة المعكوس حيث أنه من المعلوم إن للتوزيع المنتظم المتصل تطبيقات مهمة في الاحصاءات اللامعلمية وفي التقليد (المحاكاة) حيث يستخدم في توليد (generate) عينات عشوائية من التوزيعات المتصلة (العماري و العجيلي، 2010، صفحة 353).
- من المعادلة (2) تكون دالة التوزيع التراكمي:

$$F_x(x; \alpha, \beta) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}$$

وبفرض أن $U_i = F_x(x; \alpha, \beta)$ يكون:

$$U = 1 - \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}$$

وبذلك تكون:

$$x = \beta \left(e^{-\frac{1}{\alpha} \ln(1-U)} - 1 \right)$$

ويمكن صياغتها على الصورة التالية

$$x = \frac{\beta}{(1-U)^{\frac{1}{\alpha}}} - \beta \quad \dots (29)$$

5) تقدير معلمة الشكل لتوزيع لوماكس وذلك باستخدام المقدرات السابقة حسب المعادلات (14) و(19) و (24) و(25) و(28) ذلك بأخذ متوسط التقديرات لكل طريقة على حدى كالآتي:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^R \hat{\alpha}_i}{R} \quad \dots (30)$$

إذ أن $\hat{\alpha}_i$ مقدر للمعلمة الشكل (α) بحسب الاسلوب المستخدم في التقدير.

6) المقارنة بين المقدرات الثلاث باستخدام مقياس متوسط مربعات الخطأ (MSE) حسب المعادلة التالية وذلك بغية الوصول لأفضل مقدر لمعلمة الشكل.

$$MSE = E(\hat{\alpha} - \alpha)^2 = \frac{\sum_{i=1}^R (\hat{\alpha} - \alpha)^2}{R} \quad \dots (31)$$

2.4 عرض وتحليل نتائج المحاكاة Simulation Results View

بعد تنفيذ برنامج المحاكاة تم الحصول على تقديرات لمعلمة الشكل لتوزيع لوماكس وكذلك متوسط مربعات الخطأ لكل منها، وقد تم تلخيص وتبويب هذه النتائج في الجداول التالية:

الجدول (1): تقديرات معلمة الشكل $\hat{\alpha}$ ومتوسط مربعات الخطأ لهذه التقديرات عندما ($\alpha=0.5$)

n		Bayes estimator				UMVUE
		$\hat{\alpha}_{BE1}$	$\hat{\alpha}_{BE2}$	$\hat{\alpha}_{BE3}$		
				r=2	r=3	
10	$\hat{\alpha}$	0.5554	0.4443	0.4712	0.4420	0.4998
	MSE($\hat{\alpha}$)	0.0434	0.0289	0.0299	0.0289	0.0327
	Var($\hat{\alpha}$)	0.0404	0.0258	0.0291	0.0256	0.0327
25	$\hat{\alpha}$	0.5212	0.4795	0.4898	0.4792	0.5003
	MSE($\hat{\alpha}$)	0.0120	0.0102	0.0103	0.0102	0.0107
	Var($\hat{\alpha}$)	0.0116	0.0098	0.0102	0.0098	0.0107
50	$\hat{\alpha}$	0.5100	0.4896	0.4946	0.4895	0.4998
	MSE($\hat{\alpha}$)	0.0056	0.0052	0.0052	0.0052	0.0053
	Var($\hat{\alpha}$)	0.0055	0.0051	0.0052	0.0051	0.0053
100	$\hat{\alpha}$	0.5049	0.4948	0.4974	0.4948	0.4999
	MSE($\hat{\alpha}$)	0.0026	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025
	Var($\hat{\alpha}$)	0.0026	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025
200	$\hat{\alpha}$	0.5034	0.4984	0.4996	0.4984	0.5009
	MSE($\hat{\alpha}$)	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013
	Var($\hat{\alpha}$)	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013

نلاحظ من الجدول (1) أن متوسط مربعات الخطأ (MSE) لمقدرات بيبز تحت دالتي الخسارة التربيعية الموزونة ودالة الخسارة الخطية الاسية المعدلة لمعلمة الشكل لتوزيع لوماكس سجلا أقل النتائج لكل حجوم العينات عندما كانت ($\alpha=0.5$) وبذلك تكون مقدرات بيبز ($\hat{\alpha}_{BE2}$, $\hat{\alpha}_{BE3}$) هي الافضل من مقدر (UMVUE) ثم يأتي مقدر بيبز تحت دالة الخسارة التربيعية في المرتبة الاخيرة. كما أن ذات المقدرات سجلت أقل تباين من المقدرات الاخرى.

كما نلاحظ اقتراب قيم (MSE) لكل المقدرات كلما زاد حجم العينة حتى تطابقت جميعها عند حجم العينة الكبير جداً ($n=200$).

الجدول (2): تقديرات معلمة الشكل α ومتوسط مربعات الخطأ لهذه التقديرات عندما ($\alpha=1.5$)

n		Bayes estimator				UMVUE
		$\hat{\alpha}_{BE1}$	$\hat{\alpha}_{BE2}$	$\hat{\alpha}_{BE3}$		
				r=2	r=3	
10	$\hat{\alpha}$	1.6606	1.3285	1.4091	1.3215	1.4945
	MSE($\hat{\alpha}$)	0.3609	0.2439	0.2495	0.2441	0.2715
	Var($\hat{\alpha}$)	0.3351	0.2145	0.2413	0.2122	0.2714
25	$\hat{\alpha}$	1.5652	1.4400	1.4709	1.4391	1.5026
	MSE($\hat{\alpha}$)	0.1075	0.0910	0.0920	0.0910	0.0952
	Var($\hat{\alpha}$)	0.1032	0.0874	0.0912	0.0873	0.0952
50	$\hat{\alpha}$	1.5344	1.4731	1.4883	1.4728	1.5037
	MSE($\hat{\alpha}$)	0.0533	0.0488	0.0492	0.0487	0.0501
	Var($\hat{\alpha}$)	0.0521	0.0480	0.0490	0.0480	0.0500
100	$\hat{\alpha}$	1.5159	1.4856	1.4932	1.4856	1.5008
	MSE($\hat{\alpha}$)	0.0246	0.0236	0.0237	0.0236	0.0239
	Var($\hat{\alpha}$)	0.0244	0.0234	0.0236	0.0234	0.0239
200	$\hat{\alpha}$	1.5091	1.4940	1.4978	1.4940	1.5016
	MSE($\hat{\alpha}$)	0.0112	0.0110	0.0110	0.0110	0.0111
	Var($\hat{\alpha}$)	0.0112	0.0109	0.0110	0.0109	0.0111

تبين من الجدول (2) أن مقدرات بيبز تحت دالتي الخسارة التربيعية الموزونة ودالة الخسارة الخطية الاسية المعدلة ($\hat{\alpha}_{BE2}, \hat{\alpha}_{BE3}$) لمعلمة الشكل لتوزيع لوماكس مازالت متفوقة على باقي المقدرات اذ سجلت أقل (MSE) وأقل تباين لكل حجوم العينات المستخدمة في البحث عندما كانت ($\alpha=1.5$)، يليها (UMVUE) ثم يأتي مقدر بيبز تحت دالة الخسارة التربيعية في المرتبة الأخيرة.

كما نلاحظ اقتراب قيم (MSE) لكل مقدرات بيبز تحت دالتي الخسارة التربيعية الموزونة ودالة الخسارة الخطية الاسية المعدلة كلما زاد حجم العينة حتى حصول التطابق عندما ($n=200$). ولم يحدث التطابق مع باقي المقدرات كما حدث عند ($\alpha=0.5$).

الجدول (3): تقديرات معلمة الشكل α ومتوسط مربعات الخطأ لهذه التقديرات عندما ($\alpha=3$)

n		Bayes estimator				UMVUE
		$\hat{\alpha}_{BE1}$	$\hat{\alpha}_{BE2}$	$\hat{\alpha}_{BE3}$		
				r=2	r=3	
10	$\hat{\alpha}$	3.3610	2.6888	2.8519	2.6747	3.0249
	MSE($\hat{\alpha}$)	1.4884	0.9660	0.9997	0.9659	1.1006
	Var($\hat{\alpha}$)	1.3581	0.8692	0.9778	0.8601	1.1000
25	$\hat{\alpha}$	3.1202	2.8705	2.9323	2.8687	2.9954
	MSE($\hat{\alpha}$)	0.4350	0.3727	0.3760	0.3727	0.3876
	Var($\hat{\alpha}$)	0.4205	0.3559	0.3714	0.3555	0.3876
50	$\hat{\alpha}$	3.0551	2.9329	2.9633	2.9324	2.9940
	MSE($\hat{\alpha}$)	0.1991	0.1852	0.1858	0.1852	0.1884
	Var($\hat{\alpha}$)	0.1961	0.1807	0.1845	0.1807	0.1883
100	$\hat{\alpha}$	3.0278	2.9673	2.9824	2.9672	2.9976
	MSE($\hat{\alpha}$)	0.0917	0.0884	0.0886	0.0884	0.0891
	Var($\hat{\alpha}$)	0.0910	0.0874	0.0882	0.0873	0.0891
200	$\hat{\alpha}$	3.0153	2.9851	2.9927	2.9851	3.0002
	MSE($\hat{\alpha}$)	0.0459	0.0450	0.0450	0.0450	0.0452
	Var($\hat{\alpha}$)	0.0456	0.0447	0.0450	0.0447	0.0452

إن ما نلاحظه من الجدول (3) أنه عندما كانت قيمة $(\alpha=3)$ كبيرة مقارنة بقيمتها السابقة حافظت مقدرات ببيز تحت دالتي الخسارة التربيعية الموزونة ودالة الخسارة الخطية الاسية المعدلة على أفضليتها مقارنة بباقي المقدرات. إذ أنها سجلت أقل قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) وأقل قيم للتباين لكل حجومات العينات المستخدمة في هذا البحث، والجدير بالملاحظة أن مقدر ببيز تحت دالة الخسارة الخطية الاسية المعدلة عندما $(r=3)$ كان هو الأفضل من بين مقدرات ببيز في جميع حجومات العينات حتى الصغيرة جداً $(n=10)$.

كما يبين الجدول (3) اقتراب قيم (MSE) للمقدر $(\hat{\alpha}_{BE2})$ من المقدر الأفضل $\hat{\alpha}_{BE3}$ عندما $(r=3)$ وحدث التطابق بينهما في أغلب حجومات العينات عدا عندما $(n=10)$.

الاستنتاجات

- 1- أظهرت الدراسة بأن مقدرات ببيز تحت دالتي الخسارة (التربيعية الموزونة والخطية الاسية المعدلة) كانت هي الأفضل من بين كل المقدرات وذلك لأنها حققت أقل (MSE) لجميع حجومات العينات وقيم المعالم المقترحة في هذا البحث.
- 2- مقدر ببيز تحت دالة الخسارة الخطية الاسية المعدلة عندما $(r=3)$ كان هو الأفضل لكل حجومات العينات حتى الصغيرة منها.
- 3- أظهرت الدراسة بأن مقدر ببيز تحت دالة الخسارة التربيعية لمعلمة الشكل لتوزيع لوماكس كان أسوأ المقدرات المدروسة في هذا البحث. وذلك لكل حجومات العينات وقيم المعالم المقترحة في هذا البحث.
- 4- كانت قيم (MSE) تتناقص مع ازدياد حجم العينة لكل قيم معلمة الشكل المقترحة وهذا ما يتطابق مع النظرية الإحصائية، مما يؤكد الجانب النظري لهذا البحث.

التوصيات

- 1- اعتماد مقدر ببيز تحت دالة الخسارة الخطية الاسية المعدلة عندما $(r=3)$ لتقدير معلمة الشكل لتوزيع لوماكس ذي المعلمتين.
- 2- القيام بدراسة مماثلة باستعمال طرق أخرى لتقدير معلمة الشكل لتوزيع لوماكس ذي المعلمتين لم يتم التطرق إليها في هذا البحث.
- 3- توسيع نطاق الدراسة ليشمل طرق ببيزية أخرى تعتمد على دالة توزيع سابق ودالة خسارة مختلفة عما تم اعتماده في هذا البحث.

المراجع:

- 1- بدر، دريد حسين (2012): مقارنة بعض طرائق تقدير دالة المعولية لتوزيع باريتو من النوع الاول باستخدام المحاكاة، مجلة العلوم الاقتصادية، العدد(31)، المجلد 8، ص 189-219.
- 2- البوزيدي، عبدالنبي محمد (2000): مبادئ الاستدلال الاحصائي، منشورات جامعة الفاتح، ليبيا.
- 3- خليل، منذر عبدالله (2012م): محاكاة خمسة طرائق لتقدير معلمة الشكل لتوزيع باريتو، مجلة تكريت للعلوم الصرفة، 17(1)، ص 287-294.
- 4- العبادي، كرم ناصر حسين (2021): التقدير البيزي لدالة البقاء بتوزيع ليندلي ذو ثلاثة معلمات مع تطبيق عملي، رسالة ماجستير منشورة، جامعة كربلاء، كلية الادارة والاقتصاد، العراق.
- 5- العمري، علي عبد السلام. العجيلي، علي حسين (2010): الاحصاء والاحتمالات النظرية والتطبيق، دار الحكمة للطباعة والنشر والتوزيع، طرابلس، ليبيا.
- 6- محمد، محمد مراجع. صابر، علي خير (2019): استخدام مقدر ببيز في تقدير معلمة القياس لتوزيع لوماكس، المؤتمر الاول حول العلوم التطبيقية، كلية العلوم الزنتان، ليبيا. ص 47-57.
- 7- موسى، فخرالدين الحاج اسماعيل. حسن، محمد لأمين (2019): مقارنة طرق التقدير لمعلمة توزيع Weibull باستخدام محاكاة مونت كارلو، المجلة العربية للنشر العلمي AJSP، العدد 11. ص 380-394.

- 8- موسى، فخرالدين. جبارة، حسام محمد (2021م): بعض خصائص توزيع لوماكس المبتور، المجلة العربية للنشر العلمي AJSp، العدد السابع والثلاثون، ص466-454.
- 9- ALNoor, Nadia.H. saa, shahad (2015): Non-Bayes, Bayes and Empirical Bayes Estimators for the shape parameter of lomax Distribution, Mathematical Theory and Modeling, vol5,No2,p17-27.
- 10-Kumar Parmil, Kour Kirandeeep , Kour Jaspreet (2018):Estimation of the Probability Density Function of Lomax Distribution, International Journal of Statistics and Economics, Vol19, NO2,p 78-88.
- 11-IJAZ, Mohammed (2021): Bayesian Estimation of the shape parameter of Lomax Distribution under uniform and Jeffery prior with Engineering Applications, Journal of science, Gazi university ,34(2), p562-577.