The North African Journal of Scientific Publishing (NAJSP)
مجلة شمال إفريقيا للنشر العلمي (NAJSP)
E-ISSN: 2959-4820
Volume 4, Issue 1, 2026
Page No: 301-308
Website: https://najsp.com/index.php/home/index
SJIFactor 2024: 5.49 معامل التأثير العربي (AIF) 2025: 0.69 ISI 2024: 0.696

An Introduction to the Study of Holomorphic Functions in Complex Analysis

Hamida Ali Shafter[1*], Sumaia Rajab Rafieda[2]
[1,2]Faculty of Education, Misurata University, Misurata, Libya

مقدمة لدراسة الدوال الهولومورفية في التحليل المركب

حميدة علي شفتر[1*]، سمية رجب رفيدة[2]
[1،2]كلية التربية، جامعة مصراتة، مصراتة، ليبيا

*Corresponding author: h.shafter@edu.misuratau.edu.ly

Received: January 07, 2026	Accepted: February 09, 2026	Published: February 19, 2026

Abstract:
This paper aims to study holomorphic functions in the complex plane and demonstrate their fundamental characteristics within the framework of complex analysis theory. It provides a definition of holomorphic functions and explains the Cauchy-Riemann equations as a necessary and sufficient condition for complex differentiability. The paper also presents the representation of these functions using power series and Taylor series, in addition to studying some basic complex functions and the properties of entire functions and Liouville's theorem and its related results. Furthermore, it presents the concept of complex integration, the Cauchy integral formula, and some important theorems. This study highlights the theoretical importance of holomorphic functions and their role in understanding many fundamental results in complex analysis.

Keyword: Holomorphic Functions, Basic concepts of holomorphic functions, Cauchy-Riemann equations.

الملخص:
تهدف هذه الورقة الي دراسة الدوال الهولومورفية في المستوى المركب وبيان اهم خصائصها الأساسية في إطار نظرية التحليل المركب. حيث يتم تقديم تعريف للدوال الهولومورفية وشرح معادلات كوشي – ريمان كشرط ضروري وكاف لقابلية الاشتقاق العقدي كما تعرض الورقة تمثيل هذه الدوال بمتسلسلات القوى ومتسلسلة تايلور إضافة الي دراسة بعض الدوال المركبة الأساسية وخصائص الدوال الكاملة ونظرية ليوفيل وبعض النتائج المرتبطة بهاو عرض مفهوم التكامل المركب وصيغة كوشي التكاملية وبعض المبرهنات المهمة، وتبرز هذه الدراسة الأهمية النظرية للدوال الهولومورفية ودورها في فهم العديد من النتائج الأساسية في التحليل المركب.

الكلمات المفتاحية: الدوال الهولومورفية، المفاهيم الأساسية للدوال الهولومورفية، معادلتا كوشي وريمان.

مقدمة:
يعد التحليل المركب من الفروع المهمة في الرياضيات لما له من دور أساسي في دراسة الدوال المعرفة على المستوى المركب وخصائصها المختلفة. وتعد الدوال الهولومورفية من أهم المفاهيم في التحليل المركب، حيث تتميز بقابليتها للاشتقاق العقدي وما يترتب عليه من خصائص رياضية مثل إمكانية تمثيلها بمتسلسلات قوى وتمتعها بدرجة عالية من الانتظام

والتحليلية. وترتبط دراسة الدوال الهولومرفية ارتباط وثيق بمعادلات كوشي - ريمان التي تمثل شرط أساسي لقابلية الاشتقاق العقدي وتؤدي الي نتائج ومبرهنات مهمة مثل صيغة كوشي التكاملية ونظرية ليوفيل.

الدوال الهولومرفية

تعريف: لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية في المستوى المركب $\mathbb{C}$ ، وليكن $f: \Omega \to \mathbb{C}$ نقول إن التابع f يقبل الاشتقاق عند نقطة $z_0 \in \Omega$ ، إذا وفقط إذا كانت النهاية التالية موجودة:

$$\Delta_{f,z_0}: \Omega \backslash \{Z_0\} \to \mathbb{C}, \quad z \to \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

لا وإذا وجدت هذه النهاية عند z_0 ، فإنها تسمى مشتقة الدالة عند z_0 ، ونرمز لها بالرمز $\acute{f}(z_0)$. ونقول إن التابع f هولومورفي على Ω إذا وفقط إذا كان قابلاً للاشتقاق عند كل نقطة من Ω .

معادلات كوشي-ريمان:

لتكن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة، حيث $z = x + iy$ ، و u و v، هما دالتان حقيقيتان في المتغيرين الحقيقيين x و y. وإذا كانت f قابلة للاشتقاق عند النقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ ، فإن المشتقات الجزئية الأولى ل u و v، يجب أن تكون موجودة عند (x_0, y_0) وتحقق شروط المعادلة:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial \mathrm{y}}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial \mathrm{x}}(x_0, y_0)$$

تربط هذه المعادلات بين سلوك الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للدالة الهولومورفية ، وهي أداة أساسية للتحقق من هولومورفية دالة معينة.

متسلسلة تايلور التحليلية:

إذا كانت الدالة f تحليلية في قرص مفتوح $D(a,r) \subseteq \mathbb{C}$، فإن f يمكن تمثيلها بسلسلة تايلور حول النقطة a على النحو التالي:

$$f\ (a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n$$

هذا التمثيل يتحقق لجميع z فيقرص التقارب $|z - a| < r$.

متباينة التقدير للتكامل (Estimation Lemma):

تُستخدم هذه المتباينة لتقدير القيمة المطلقة لتكامل دالة عقدية على منحنى مغلق، وتُعرف أيضًا باسم "متباينة ML" .

إذا كانت $f(z)$ دالة معرفة على المنحنى C ، وكان: $|\ f(\mathrm{z})\ | \leq M$ لكل $z \in C$ ، حيث M عدد ثابت موجب، L هو طول المنحنى C ، فإن: $|\oint_c\ f(z)dz| \leq ML$

الدوال الأساسية للدوال الهولومورفية:

1. **الدالة الأسية المركبة (Complex Exponential Function):**

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

حيث $z = x + iy$ و $x, y \in R$

2. **الدوال المثلثية المركبة (Complex Trigonometric Functions):**

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad , \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \cot z = \frac{1}{\tan z}, \sec z = \frac{1}{\cos z}, \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

3. **الدوال الزائدية المركبة (Complex Hyperbolic Functions):**

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad , \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

مع ملاحظة ان:

$$\sinh(iz) = i \sin z \qquad , \cosh(iz) = \cos z$$

4. **الدالة اللوغاريتمية المركبة (Complex Logarithmic Function):**

إذا كان $w = \log z$ فإن $e^w = z$ ، و إذا كان $z = re^{i\theta}$ (الصورة القطبية) فإن:

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \quad ,k \in Z$$

5. **الدالة الأسية العامة (Complex Power Function) :**

$$z^c = e^{c \log z}$$

(حيث c عدد عقدي ثابت و $\log z$ في الدالة اللوغاريتمية المركبة)

6. **الدالة الكاملة (Entire Functions):**

الدالة المركبة $f(z)$ تُسمى دالة كاملة إذا كانت هولومورفية في جميع أنحاء المستوى العقدي $\mathbb{C}$. بعبارة أخرى، يجب أن تكون الدالة $f(z)$ قابلة للاشتقاق العقدي عند كل نقطة $z \in \mathbb{C}$.

خصائص الدوال الكاملة:

- **قابلة للاشتقاق لمرات لا نهائية:** بما أن الدوال الهولومورفية قابلة للاشتقاق لعدد لا نهائي من المرات، فإن الدوال الكاملة تتمتع بهذه الخاصية أيضًا، أي أن جميع مشتقاتها من أي رتبة هي أيضًا دوال كاملة.
- **تمثيل بمتسلسلة قوى (Power Series): يمكن** تمثيل أي دالة كاملة بمتسلسلة قوى متقاربة عند كل نقط المستوى المركب حول أي نقطة $z_0 \in \mathbb{C}$ ، وتكون هذه المتسلسلة متقاربة في جميع أنحاء المستوى المركب:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_n)^n \quad ,z \in \mathbb{C}$$

عندما تكون $z_0 = 0$ نحصل على متسلسلة ماكلورين:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad ,z \in \mathbb{C}$$

7. **الدالة المحدودة (Bounded Function):**

لتكن $f: D \to \mathbb{C}$ دالة مركبة معرفة على مجموعة Dفي المستوى المركب $\mathbb{C}$ ، (قد تكون D منطقة مفتوحة، مجموعة مغلقة، أو حتى المستوى المركب بأكمله). نقول إن الدالة fمحدودة على Dإذا وجد عدد حقيقي موجب $M > 0$ بحيث أن القيمة المطلقة لـ $f(z)$ لا تتجاوز Mلجميع $z \in D$ ، يُعبر عن ذلك كالتالي:

$$|f(z)| \le M \quad \forall\, z \in D$$

هذا يعني أن جميع قيم الدالة $f(z)$ تقع داخل قرص مغلق في المستوى المركب، مركزه نقطة الأصل ونصف قطره M.

نظرية ليوفيل (Liouville's Theorem):

لتكن $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ دالة كاملة أي أنها هولومورفية في جميع أنحاء المستوى المركب $\mathbb{C}$. إذا كانت fمحدودة، بمعنى أنه يوجد ثابت حقيقي موجب Mبحيث:

$$|f(z)| \le M \quad \forall\, z \in D$$

فإن fتكون دالة ثابتة، أي يوجد ثابت مركب cبحيث:

$$f(z) = c \qquad z \in \mathbb{C}$$

البرهان:

ليكن $z_0 \in \mathbb{C}$ نقطة اختيارية في المستوى العقدي. بما أن fدالة كاملة، فإن مشتقاتها من جميع الرتب موجودة وهولومورفية في $\mathbb{C}$. باستخدام صيغة كوشي التكاملية للمشتقة الأولى عند النقطة z_0 لدينا:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz$$

حيث C هو أي منحنى مغلق بسيط يحيط بالنقطة z_0 . نختار Cلتكون دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها R ، حيث $z = z_0 + Re^{i\theta}$ و θيتغير من 0إلى 2π. وبالتالي، $dz = iRe^{i\theta} d\theta$.

باستخدام متباينة التقدير للتكامل نطبقها على التكامل أعلاه على الدائرة C، لدينا $R = |z - z_0|$ وبالتالي $R^2 = |(z - z_0)^2|$. وبما أن fمحدودة بـ M، فإن $|f(z)| \le M$ على C.طول الدائرة C هو $2\pi R$. بالتالي، نحصل على التقدير التالي لمقدار المشتقة الأولى:

$$|f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right| \le \frac{1}{2\pi} \oint_c \frac{|f(z)|}{|(z - z_0)|^2} |dz|$$

$$|f'(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} \frac{M}{R^2} \left| iRe^{i\theta} \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} \frac{M}{R^2} R d\theta$$

$$|f'(z_0)| = \frac{M}{2\pi R}\oint_0^{2\pi} d\theta = \frac{M}{2\pi R}(2\pi) = \frac{M}{R}$$

وبذلك يكون $|f'(z_0)| \geq \frac{M}{R}$ لأي نصف قطر $R > 0$. بما أن هذه المتباينة يجب أن تكون صحيحة لأي قيمة لـ R ، يمكننا أخذ النهاية للطرفين عندما R→∞ :

$$\lim_{R\to\infty}|f'(z_0)| \leq \lim_{R\to\infty}\frac{M}{R} = 0$$

بما أن $|f'(z_0)|$ قيمة غير سالبة وأقل من أو تساوي الصفر، يجب أن يكون:

$$|f'(z_0)| = 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0$$

عند أي نقطة z_0 في المستوى العقدي $\mathbb{C}$.

إذا كانت مشتقة الدالة $f(z)$ تساوي صفرًا عند كل نقط المستوى العقدي $\mathbb{C}$ ، فإن الدالة $f(z)$ يجب أن تكون ثابتة.

المفاهيم الأساسية للدوال الهولومورفية:

- **الاشتقاق العقدي (Complex Derivative):** لتكن $f: U \to C$ دالة معرفة على مجموعة مفتوحة $U \subseteq C$. نقول إن f قابلة للاشتقاق عقدياً عند النقطة $z_0 \in U$ إذا كانت النهاية التالية موجودة:

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

وهذا الشرط للاشتقاق المركب هو ما يميز الدوال الهولومورفية.

مثلا الدالة $f(z) = z^2$ قابلة للاشتقاق عقديا في كل نقاط المستوى المركب، وبالتالي فهي دالة هولومورفية.

خواص اشتقاق الدوال الهولومورفية:

1. لتكن U مجموعة مفتوحة غير خالية من المستوي المركب $\mathbb{C}$، ولتكن $z_0 \epsilon U$. وأخيراً، ليكن g و f تابعين مركبين معرفين على U وقابلين للاشتقاق عند z_0 . عندئذ يكون التابعان $f + \lambda g$ حيث $(\lambda \epsilon C)$ و fg قابلين للاشتقاق عند z_0 .
2. لتكن U و V مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين من المستوي المركب C . وليكن $f: U \to C$ تابعاً قابلاً للاشتقاق عند Z_0 من U ، ويُحقِّق $f(U) \subset V$ وليكن كذلك $g: V \to C$ تابعاً قابلاً للاشتقاق عند $f(z_0)$. عندئذ يكون $g \circ f$ قابلا للاشتقاق عند z_0 ويكون:

$$(g \circ f)'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z)) - g(f(z0))}{z - z_0}$$

باستخدام تعريف المشتقة وإدخال حد وسيط:

$$= \lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z)) - g(f(z0))}{f(z) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

عندما $z \to z_0$ فإن $f(z) \to f(z_0)$ بسبب استمرارية f عند z_0 ، وبالتالي:

$$= \lim_{w\to f(z_o)}\frac{g(w) - g(f(z0))}{w - f(z_0)} \cdot \lim_{z\to z_0}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$$

التكامل العقدي للدوال الهولومورفية:

تعريف: لتكن t متغيراً حقيقياً، فإن المنحنى في المستوى يسمى منحنى انسيابيّاً أو أملسَ (*smooth*) إذا وإذا كان فقط يمكن تمثيله بدالتين حقيقيتين:

$$y = \psi(t) \quad \text{و} \quad x = \Phi(t)$$
$$\alpha \leq t \leq \beta$$

بحيث يكون تفاضل هاتين الدالتين:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi'(t) \qquad , \qquad \frac{dy}{dt} = \psi(t)$$

موجوداً في المتغير t على نفس الفترة.

تعريف: إذا كان c منحنى بارمتري انسيابي، فإن النقطة على المنحى المناضرة للقيم $t = \alpha$ تسمى النقطة الابتدائية للمنحنى، والنقطة المناظرة للقيمة $t = \beta$ تسمى النقطة النهائية للمنحنى.

تعريف: المنحنى c يسمى مساراً (*path*) إذا كان مكون من عدد نهائي من المنحنيات الانسيابية $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n,$ متصلة بطريقة بحيث النقطة النهائية للمنحنى c_k منطبقة على النقطة الابتدائية للمنحنى c_{k+1} لكل $k = 1, 2, 3, \ldots, n$

تعريف: إذا كانت النقطة النهائية للمسار c منطبقة على النقطة الابتدائية، فإن c يسمى مساراً مغلقاً (closed path).

تعريف: إذا كانت النقطة النهائية للمسار c غير منطبقة على النقطة الابتدائية، فإن c يسمى مساراً مفتوحاً (open path).
تعريف: إذا كان المسار c لا يقطع نفسه الا عند نقطة البداية والنهاية، التي يمكن ان تكونا منطبقتين فإن المسار يسمى مساراً بسيطاً (simple path). وإذا كان غير ذلك فإنه يسمى مساراً متعدداً (multiple path).
مبرهنة منحنى جردان: بفرض أن c مسار مغلق بسيط في المستوى، عندئذٍ يُقسَم المستوى بالمسار c إلى ثلاثة مجموعات لبست متقاطعة:

1. المسار c نفسه.
2. المنطقة داخل المنحنى c ، والتي يُرمز إليها بالرمز $Int\ (c)$ ، وهي مجموعة مفتوحة محدودة.
3. المنطقة خارج المنحنىc، والتي يُرمز إليها بالرمز $\mathrm{Ext}\ (c)$، وهي مجموعة مفتوحة غير محدودة.

علاوة على ذلك، يكون المنحنى c حداً للمنطقة الداخلية $Int\ (c)$ والخارجية $\mathrm{Ext}\ (c)$.
تعريف: اتجاهات المسارات

- المسار البسيط المفتوح يكون موجباً إذا كان من نقطته الابتدائية إلى نقطته النهائية.
- المسار البسيط المغلق يكون موجباً إذا كانت المنطقة الداخلية له تقع على يسار اتجاه المسار.
- وفي الحالتين السابقتين، يكون اتجاه المسار سالباً إذا اخذ المسار عكس التجاه الموجب.
- إذا كان c مسارا اتجاهيًّا فإن الرمز $-c$ يرمز إلى نفس المسار مع اتجاه عكسي للمسار c.

التكامل الخطي (Definition of Line Integral):
تعريف: إذا كان c منحنى ناعماً في المنطقة R ، فإن التكامل الخطي للدالة f على طول c هو:

$$\int_{c} f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i).\Delta s_i$$

بشرط وجود النهاية.
الأن يمكن تعريف التكامل الخطي بالنسبة لطول القوس كما يلي:

1. إذا كان القوس c على الصورة $y=g(x)$ فإن:

$$\int_{A}^{B} f(x,y)dx = \int_{a}^{b} f[x,g(x)]dx$$

$$\int_{A}^{B} f(x,y)ds = \int_{a}^{b} f(x,y)\sqrt{1+(\acute{g}(x))^2}dx$$

2. إذا كان القوس c على الصورة $\mathrm{x}=\mathrm{h}(\mathrm{y})$ فإن:

$$\int_{A}^{B} f(x,y)dy = \int_{c}^{d} f(h(x),y)dy$$

$$\int_{A}^{B} f(x,y)ds = \int_{c}^{d} f(x,y)\sqrt{1+(\acute{h}(y))^2dy}$$

3. إذا كان القوس c على الصورة البارامترية:
فإن: $x=x(t)\ \ ;\ \ y=y(t)\ \ ;\ \ t_0\le t\le t_1$

$$\int_{A}^{B} f(x,y)dx = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t),y(t)]\cdot\dot{x}(t)dt$$

$$\int_{A}^{B} f(x,y)dy = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t),y(t)]\cdot\dot{y}(t)dt$$

$$\int_{A}^{B} f(x,y)ds = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t),y(t)]\cdot\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}dt$$

وإذا كانت $f(x,y)=1$ فإننا نحصل على طول القوس Arc Length.
صيغة كوشي التكاملية:
بفرض أن:
أ. الدالة f تكون تحليلية على المسار (الكفاف) المغلق البسيط في الاتجاه الموجب c ، وكذلك $Int(c)$.

ب. z_0 اي نقطه بداخل $Int(c)$ فإن:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

التكامل المركب (Complex integration):

تكامل الدالة $f(x)$ على الفترة $a\le x\le b$ يعرف كما يلي:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{p\to 0} f(x_k^k)\Delta x_k$$

حيث p أكبر قيمة من قيم $|\Delta x_k|$ ، و Δx_k تمثل طول الفترات الجزئية الناتجة من تجزئيه الفترة $a\le x\le b$ ، و x_k تكون نقطة عشوائية في الفترة الجزئية k . الشرط الكافي لوجود النهاية يكون اتصالية الدالة f على فترة التكامل. نفس الشرط يكون كافيا لضمان تكامل الدالة المركبة.

تعريف التكامل المركب:

إذا كان لدينا منحنى ناعم c معرف بالمعادلتين $x=\emptyset(t)$ و $y=\psi(t)$ حيث $\alpha\le t\le \beta$ يمكن التعبير عن هذا المنحنى كما يلي:

$$c: z(t)=x(t)+iy(t)\quad,\quad \alpha\le t\le\beta$$

إذا كانت $f(z)\ =W$ دالة معرفة ودالة مفردة عند كل نقطة على c ، كما في تعريف التكامل الخطي ، فإن تجزئة الفترة $\alpha\le z$او$t\le\beta$ تعطى:

$$z_0,z_1,z_2,\dots\dots\dots.,z_n$$

على c ، حيث z_0 النقطة الابتدائية و z_n النقطة النهائية.

نظرية: وجود التكامل المركب:

إذا كانت الدالة $f(z)=u(z,y)+iv(x,y)$ متصلة عن كل نقطة على منحنى ناعم c ، فإن تكامل الدالة f على استطالة المنحنى c يكون موجودا، و:

$$\int_c f(z)dz=\int_c udx-\int_c vdy+i\int_c udy+i\int_c vdx$$

خواص التكامل العقدي على مسار:

بفرض أن ξ ثابت إختياري، و $c+k$ مساراً مكونا من المسارين القابلين للتكامل c و k، وبفرض أيضا أن الدالتين $f(z)\,,g(z)$ تكامليتان على المسارين $c\,,k$ فإن:

$$1-\int_c \xi f(z)dz=\xi\int_c f(z)dz$$

$$2-\int_c (f(z)+g(z))dz=\int_c f(z)dz+\int_c g(z)dz$$

$$3-\int_{c+k} f(z)dz=\int_c f(z)dz+\int_k f(z)dz$$

$$4-\int_{-c} f\,(z)dz=-\int_c f\,(z)dz$$

إذا $|f(z)|\le M$ لكل z غلى المسار c يساوي L فإن:

$$5-\left|\int_C f(z)dz\right|\le ML$$

تكامل الدوال الهولومورفية على مسار:

مبرهنة: لتكن Ω مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{C}$ ، وليكن $F:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً على Ω ، نفترض أن F' تابعٌ مستمرٌّ على Ω ، عندئذ يكون:

$$\int_\Gamma F'(z)dz=0$$

وذلك مهما يكن Γ مساراً مغلقاً من الصف C^1 قِطَعِيّاً محتوى في Ω.

مثلاً: مهما يكن Γ طريقا مغلقا من الصف C^1 قِطَعِيّاً ومحتوى في $\mathbb{C}$ فلدينا:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{\Gamma} z^n \, dz = 0$$

نحتاج إلى إيجاد دالة $F(z)$ حيث تكون $F'(z) = z^n$.

الدالة $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ مشتقتها $F'(z) = \frac{(n+1)z^n}{n+1} = z^n$ وذلك لجميع قيم $n \in \mathbb{N}$. هذه الدالة $F(z)$ معرفة وقابلة للاشتقاق على المجموعة المفتوحة $\mathbb{C}$ بأكملها.

المسار Γ هو مسار مغلق، مما يعني أن نقطة البداية تساوي نقطة النهاية أي $a = b$ فإن:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = F(b) - F(a)$$

بالتعويض عن $f(z) = z^n$ والدالة $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$:

$$\int_{\Gamma} z^n dz = F(b) - F(a) = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

وبما أن $a = b$ للمسار المغلق، فإن:

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \frac{a^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = 0$$

إذن، قيمة التكامل $\int_{\Gamma} z^n \, dz$ تساوي صفراً لأي عدد طبيعي n وأي مسار مغلق Γ من الصف C^1 في $\mathbb{C}$.

مثلاً: مهما يكن Γ مسارا مغلقا من الصف C^1 قِطَعِيّاً ومحتوى في $\mathbb{C}$ فلدينا:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{\Gamma} z^{-2-n} \, dz = 0$$

يكفي أن نطبّق المبرهنة على التابع الهولومورفي $F(z) = -\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{z^{n+1}}$.

مبرهنة: لتكن Ω مجموعة مفتوحة ونجمية من $\mathbb{C}$ ، ولتكن ω من Ω . وأخيراً، ليكن $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تابعاً مستمراً على Ω وهولومورفياً على $\Omega \backslash \{\omega\}$. عندئذٍ يوجد تابع $F : \Omega \to \mathbb{C}$ هولومرفيا على Ω ، ويحقق:

$$f = F'$$

نتيجة (1) لتكن Ω مجموعة مفتوحة ونجمية من $\mathbb{C}$ ، ولتكن $\omega \in \Omega$. وأخيراً، ليكن $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تابعاً مستمراً على Ω وهولومورفياً $\Omega \backslash \{\omega\}$. عندئذ يكون:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

وذلك أياً كان المسار المغلق Γ من الصف C^1 قِطَعِيّاً المحتوى في Ω

مبرهنة:علاقة كوشي في حالة مجموعة نجمية:

لتكن Ω مجموعة مفتوحة ونجمية من $\mathbb{C}$ ، ليكن $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً. عندئذ، أيا كان المسار المغلق Γ من الصف C^1 قِطَعِيّاً المحتوى في Ω ، وأياً كانت ω من $\Omega \backslash \Gamma$ **فإنّ:**

$$f(\omega) \cdot Ind(\omega, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \omega} dz$$

مبرهنة: لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً. عندئذ يكون f تحليلياً في Ω.

نتيجة: لتكن Ω مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً. عندئذ يكون f' هولومورفياً أيضاً.

مبرهنة: موريرا Morera: لتكن Ω مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تابعاً مستمراً يُحقِّق $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ أياً كان المثلّث Δ المحتوى في Ω. عندئذ يكون f هولومورفياً على Ω.

نتيجة: متراجحات كوشي ليكن $f : D(0, R) \to \mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً، حيث أن $\sum a_n z^n$ نصف قطر تقاربها أكبر من أو يساوي R، وتحقق:

$$\forall\, z \in D(0, R) \ , \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

حيث أنه إذا كانت r من $[0, R]$ كان:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta})d\theta$$

وبناءً على هذا، إذا عرّفنا:

$$M(r) = \sup_{|z|=r}|f(z)|$$

كان لدينا:

$$\left(\text{متراجحات كوشي}\right)\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \le \frac{M(r)}{r^n}$$

الخاتمة:

في هذه الورقة تم استعراض مفهوم الدوال الهولومورفية في المستوى المركب وبيان اهم خصائصها. حيث تم التطرق الي تعريفها وشروط كوشي-ريمان باعتبارها شرطا أساسيا لقابلية الاشتقاق العقدي إضافة الي دراسة تمثيل هذه الدوال بمتسلسلات القوى وتايلورو تم عرض بعض الدوال المركبة الاساسيةو خصائص الدوال الكاملة مع التطرق الي نظرية ليوفيب وبعض النتائج المهمة المرتبطة بها. وتناولت الورقة مفهوم التكامل المركب وصيغة كوشي التكاملية وبعض المبرهنات الأساسية التي تبرز الترابط بين خواص الاشتقاق والتكامل في التحليل المركب. وتؤكد هذه النتائج الأهمية النظرية للدوال الهولومورفية ودورها في تطوير العديد من المفلهيم والنتائج الأساسية في التحليل المركب. كما تفتح هذه الدراسة المجال لمزيد من الأبحاث المتقدمة المرتبطة بتطبيقات التحليل المركب في الفروع الرياضية المختلفة

المصادر والمراجع:

1. John B.Conway, Function of one complex varirable I,2^n Edition.
2. Elias m.stein ,Rami shakarchi, Compiex Analysis , Princeton Lectures in analysis ,2003
3. د. عمران قوبا، التحليل، الجزء الرابع، منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجبا، سوريا، 2018.
4. د. رمضان جهيمة، د. سالم القوي، التحليل المركب، دار الكتاب الجديد المتحدة 2013.
5. د. أحمد عبدالعالي هب الريح، نظرية المتغيرات المركبة وتطبيقاتها، دار ومكتبة الشعب للنشر والتوزيع 2012
6. د. عادل بشير بادي، مبادئ التحليل المركب، المبادرة الحرة للنشر العلمي.
7. د. زكريا نوت، التحليل المركب (العقدي)، منشورات جامعة حلب كلية العلوم 2011
8. وليام. ر. دريك ترجمة د. سعدون إبراهيم البراهيم، د. ابوبكر الصديق بيومي، التحليل المركب وتطبيقاته، النشر العلمي والمطابع جامعة الملك سعود.
9. مواري سبيجل، ترجمة د. حسين العويضي، الدوال المركبة، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية 2009.
10. أ. د مجدي الطويل، مقدمة في علم التحليل المركب، دار النشر للجامعات 2005.
11. دويل فا- تشرشل وآخرون، ترجمة د. بديع توفيق، د. أسماعيل عبد الرحمن، المتغيرات المركبة وتطبيقاتها، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية 2005.