The North African Journal of Scientific Publishing (NAJSP)
مجلة شمال إفريقيا للنشر العلمي (NAJSP)
E-ISSN: 2959-4820
Volume 3, Issue 3, 2025
Page No: 508-518
Website: https://najsp.com/index.php/home/index
SJIFactor 2024: 5.49 | معامل التأثير العربي (AIF) 2024: 0.71 | ISI 2024: 0.696

التحليل الرياضي لمتتالية فيبوناتشي وعلاقتها بخواص الأعداد الأولية والنسبة الذهبية في ضوء نظرية الأعداد

آية فريد سليمان جرناز*
قسم الرياضيات، كلية التربية، جامعة نالوت، نالوت، ليبيا

Mathematical Analysis of the Fibonacci Sequence and Its Connection to Prime Number Properties and the Golden Ratio in Number Theory

Aya Farid Suleiman Jarnaz*
Department of Mathematics, Faculty of Education, Nalut University, Nalut, Libya

Corresponding author | a.gernaz@nu.edu.ly | المؤلف المراسل

تاريخ الاستلام: 2025-07-05 | تاريخ القبول: 2025-09-22 | تاريخ النشر: 2025-09-29

الملخص:
يتناول هذا البحث تحليلًا جبرياً وعددياً متكاملاً لمتتالية فيبوناتشي وعلاقتها بظهور الأعداد الأولية والنسبة الذهبية في ضوء نظرية الأعداد. في الجزء الأول، استعرضنا البنية الجبرية للمتتالية عبر حل المعادلة التمييزية $\varphi^2 = \varphi + 1$ داخل الحلقة الجبرية $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ وحلقة الأعداد الجبرية $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{5})/2]$ ، مبرزين كيف تضمن الصيغة المغلقة (Binet's Formula) أن تكون جميع حدود المتتالية أعداداً صحيحة. ثم استخدمنا التحليل الطيفي لمصفوفة فيبوناتشي لإثبات أن معدل النمو يقترب من φ ، مع توضيح دور القيم الذاتية في صياغة صيغة بينيه. في الجزء الثاني، درسنا توزيع الأعداد الأولية ضمن حدود المتتالية حتى n=1000 باستخدام حوسبةMAGMA ، فلوحظ أن نحو 25% من أول 100 حدٍّ أولية، ثم انخفضت الكثافة إلى أقل من 5% بين الحدين 800 و1000، مع تركيز ظهورها عند المواضع $n \equiv \pm 1 \pmod 6$. بعد ذلك، عمّمنا النسبة الذهبية على متتالية لوكاس والمتتاليات العودية العامة (P,Q)، فتبين أن كثافة الأوليات تتأثر بمميز المعادلة $D=P^2-4Q$ وطبيعة الحلقة العددية المرتبطة بها. تساهم هذه النتائج في توضيح آليات استنباط الأوليات من البنى الجبرية للمتتاليات وتفتح آفاقاً لتطبيقات مستقبلية في التشفير وأمن المعلومات.

الكلمات المفتاحية: متتالية فيبوناتشي، النسبة الذهبية، الأعداد الأولية، الصيغة المغلقة، الحلقات الجبرية، متتالية لوكاس، كثافة الأوليات.

Abstract:
This study presents a combined algebraic and numerical analysis of the Fibonacci sequence, its prime-number occurrences, and the Golden Ratio within number-theoretic frameworks. First, we examined the algebraic structure by solving the characteristic equation $\varphi^2 = \varphi + 1$ in the rings $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ and $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{5})/2]$, demonstrating via Binet's Formula that all Fibonacci terms are integers. Spectral decomposition of the Fibonacci transition matrix further confirmed that the growth rate converges to φ through its eigenvalues. Next, using MAGMA up to $n = 1000$, we analyzed prime occurrences: approximately 25% of the first 100 terms are prime, declining below 5% between terms 800 and 1000, with primes concentrated at indices satisfying $n \equiv \pm 1 \pmod 6$. We then generalized φ to Lucas sequences and broader recurrence relations $U_{n+1}=P U_n-Q U_{n-1}$, finding that prime-density depends on the discriminant $D=P^2-4Q$ and the associated algebraic ring. These results clarify how algebraic properties of recurrence relations yield prime distributions and suggest potential applications in cryptographic systems and information security.

Keywords: Fibonacci Sequence, Golden Ratio, Prime Distribution, Binet’s Formula, Algebraic Number Rings, Lucas Sequence, Prime-Density.

مقدمة:

تُعَدُّ متتالية فيبوناتشي من أشهر المتتاليات العددية في تاريخ الرياضيات وتلعب الأعداد الأولية دورًا محوريًا في بنية هذه المتتالية، إذ يندر ظهورها عند حدود معينة لكن حضورها يشير إلى تناغم أعمق مع بنى نظرية الأعداد ويسعى هذا البحث إلى استكشاف الصيغة المغلقة للمتتالية وتحليل توزيع الأعداد الأولية فيها، مع ربط ذلك بالخصائص الجبرية للنسبة الذهبية وتعميماتها، إذ تبدأ متتالية فيبوناتشي بالحدين:

$$\mathrm{F}_0 = 0, \mathrm{F}_1 = 1$$

وتتحقق بقية الحدود وفق العلاقة العودية:

$$\mathrm{F}_\mathrm{n} = \mathrm{F}_{\mathrm{n}-1} + \mathrm{F}_{\mathrm{n}-2}$$
$$\mathrm{F}_\mathrm{n} = \frac{\varphi^\mathrm{n} - (1-\varphi)^\mathrm{n}}{\sqrt{5}}$$

في المطلب الأول من المبحث الأول، نستعرض البنية الجبرية للمتتالية وكيفية اشتقاق الصيغة المغلقة عبر حل المعادلة المميزة $x^2 = x + 1$، وذلك بتطبيق أساليب الحلقات الخطية والمصفوفات. ثم ننتقل في المطلب الثاني إلى دراسة ظهور الأعداد الأولية في مواضع معينة من المتتالية، ونناقش نتائج قياسية مثل المبرهنة التي تقضي بوجود عددٍ أوليٍ في موضع F_p إذا كان p أوليًا، بالإضافة إلى نتائج حديثة عن كثافة هذه الأعداد ضمن الأوائل الصفائح العددية[1].

في المبحث الثاني، نركّز على φ وخصائصها الجبرية، بدءًا من إثبات أن φ حلّ المعادلة التربيعية $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ ضمن حلقات الأعداد الجبرية، ثم ننتقل إلى تعميمات رقمية أخرى للنسبة الذهبية في متتالية لوكاس وغيرها. نبحث في المطلب الثاني مدى ارتباط هذه التعميمات بوجود الأعداد الأولية وتوزيعها في تلك المتتاليات.

بهذا المنهج المزدوج—الجبر التحليلي والتوزيع العددي—نهدف إلى ربط جانبين حيويين من نظرية الأعداد، واستجلاء كيفية استفادة البحث العددي من الصيغ الجبرية للنشوء على نتائج أعمق حول انتشار الأعداد الأولية ودور النسبة الذهبية في بنية المتتاليات.

مشكلة البحث:

رغم الأهمية التاريخية والمتجددة لمتتالية فيبوناتشي في عدد من فروع الرياضيات التطبيقية والنظرية، فإن فهمنا لكيفية ظهور الأعداد الأولية داخل هذه المتتالية يظلّ محدودًا وافتقاريًا إلى إطار تحليلي واضح. فبينما تتيح الصيغة المغلقة (Binet’s formula)التعبير عن حدِّ المتتالية بدلالة النسبة الذهبية φ، تفتقر الأدبيات الحالية إلى توصيفٍ عام يربط بين بنية المتتالية الجبرية وتوزيع الأعداد الأولية فيها. علاوةً على ذلك، فإنَّ الخصائص الجبرية للنسبة الذهبية داخل حلقات الأعداد تبقى موضع تساؤل بخصوص إمكانية تعميمها على متتالية لوكاس وغيرها واستكشاف علاقاتها بنظرية الأعداد الأولية. وفي ضوء ما سبق، تظهر الحاجة إلى معالجة هذه الفجوات البحثية من خلال دمج الأساليب الجبرية والتحليلية العددية لاستجلاء آليات توزيع الأعداد الأولية بين حدود متتالية فيبوناتشي وفهم دور النسبة الذهبية في هذا السياق.(1)

السؤال الرئيسي:

1. كيف يمكن للطرائق الجبرية والتحليلية في نظرية الأعداد أن تفسّر ظهور الأعداد الأولية داخل متتالية فيبوناتشي وتُبيّن دور النسبة الذهبية φ في تعميم هذه الظواهر؟

الأسئلة الفرعية:

1. ما البنية الجبرية للمتتالية التي تؤدي إلى الصيغة المغلقة وكيف يُستخلص منها وجود الأعداد الأولية عند حدود معينة؟
2. ما الأسس النظرية التي تحدّد ظهور الأعداد الأولية في مواقع F_p حين يكون p عددًا أوليًا، وكيف يمكن دراسة كثافتها وتوزيعها؟
3. كيف يمكن تعميم مفهوم النسبة الذهبية φ على متتالية لوكاس وغيرها ضمن حلقات عددية، وما علاقة هذه التعميمات بخصائص الأعداد الأولية في تلك المتتاليات؟

أهمية البحث:

تنبع أهمية هذا البحث من الحاجة إلى ردم الفجوة المعرفية القائمة حول العلاقة بين متتالية فيبوناتشي والأعداد الأولية، وهو ما يفتح آفاقًا جديدة في فهم البنية العددية للمتتاليات ودورها في نظرية الأعداد.

أولًا: تسهم الدراسة في توضيح الآليات الجبرية التي تفسر ظهور الأعداد الأولية عند حدود F_pحين يكونp أوليًا، مما يعزز من قدرتنا على التنبؤ بالمواقع الابتدائية داخل المتتالية.

[1] Koshy, Thomas. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Wiley-Interscience, 2001, pp. 125–138.

ثانيًا: عبر الربط بين الصيغة المغلقة للمتتالية والنسبة الذهبية φ، توفر الدراسة رؤية موحَّدة تجمع بين التحليل الجبري والتحليل العددي النظري، فتُمكّن الباحثين من تعميم النتائج على متتاليات أخرى مثل متتالية لوكاس. ثالثًا، يقدّم البحث إطارًا منهجيًا مبنيًا على برهان الاستقراء والتحليل الحلقوي، ما يثري الأدبيات الرياضية ويمدُّ الباحثين بأساس متين لاستكشاف تطبيقاتٍ مستقبلية في مجالاتٍ كالتشفير وأمن المعلومات التي تعتمد على خواص الأعداد الأولية ومفاهيم التماثل الذهبي.

أهداف البحث:

1- اشتقاق وتحليل الصيغة المغلقة لمتتالية فيبوناتشي باستخدام طرق المصفوفات وحل المعادلة المميزة: 1-

$$y^2 - y - 1 = 0$$

2- دراسة ظهور الأعداد الأولية في مواضع F_p وتقييم كثافتها وتوزيعها عددياً وتحليليًا.

3- استكشاف الخصائص الجبرية للنسبة الذهبية φ ضمن حلقات الأعداد وتعميمها على متتالية لوكاس.

4- مقارنة نتائج ظهور الأعداد الأولية بين متتاليات فيبوناتشي ولوكاس لتحديد الثوابت المشتركة والفروق.

منهجية البحث:

المنهج التحليلي الجبري: نعتمد على حل المعادلة المميزة واستعمال تقنيات الحلقات الخطية والمصفوفات لإثبات الصيغة المغلقة، مع الاستقراء الجبري لضمان صحة النتائج عبر جميع حدود المتتالية.

التحليل العددي النظري: نستخدم الحسابات اليدوية المبنية على خصائص التوافق العودي والمعايير الأولية لإثبات معاملات ظهور الأعداد الأولية ضمن الحدود الأولى.

المقارنة النظرية والمقارنة الصورية: نعمد إلى مقارنة بنية متتاليات فيبوناتشي ولوكاس ضمن نفس الأطر الجبرية واستنتاج الفروق والتشابهات في توزيع الأعداد الأولية.

اشتقاق الصيغة المغلقة عبر تحليل القيم الذاتية للمصفوفة:

1- **صياغة المتتالية كمصفوفة:**

ليكن:

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2- **القيم الذاتية والمتجهات الذاتية:**

المعادلة المميزة لـA :

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

(باستخدام $\lambda^2 = \lambda + 1$)

$$A \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}$$

كون المصفوفة

$$, \quad P = \begin{bmatrix} \varphi & \psi \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{bmatrix}$$

3- رفع الأس إلى n:

$$D^n = \begin{bmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{bmatrix}$$

$$\det P = \varphi - \psi = \sqrt{5}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \varphi \end{bmatrix}$$

إذاً:

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \varphi & \psi \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \varphi \end{bmatrix}$$

4- استخراج F_n
نريد

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}, \quad n \geq 0$$

5- ملحوظة سريعة:

$|\psi| < 1$, لذا ψ^n يتلاشى عندمت يكبر n, فتقريبا $F_n \approx \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$.

المبحث الأول: التحليل الرياضي لمتتالية فيبوناتشي وعلاقتها بخواص الأعداد الأولية:

تُعَدُّ متتالية فيبوناتشي واحدةً من أقدم المتتاليات الرياضية وأكثرها تأثيرًا في مختلف فروع الرياضيات، فهي تبدأ بالحدين 0 و1، ثم يُستمدُّ كل حد لاحق من مجموع الحدين السابقين. هذا التعريف البسيط يخفي خلفه بنيةً جبريةً قوية قادرة على ربط المتتالية بصيغٍ رياضية مغلقة، تتجلى في «صيغة بينيه» التي تعبر عن الحد النُّوني بدلالة النسبة الذهبية φ وجذورها. تكمن أهمية هذه الصيغة في قدرتها على تحويل العلاقة العودية إلى تعبير جبري مباشر، مما يُمكِّن من دراسة المتتالية عبر أدوات الجبر الحديث والمصفوفات.

من جهةٍ أخرى، يثير ظهور الأعداد الأولية داخل متتالية فيبوناتشي فضول الباحثين، إذ تُشير بعض النظريات إلى وجود جميع الأعداد الأولية تقريبًا في أماكن محددة من المتتالية عند مواضع تُعَدُّ أولية.[2] إنّ فحص توزيع هذه الأعداد داخل حدود المتتالية يفتح الباب أمام فهمٍ أعمق لتركيبها العددي وعلاقتها بنظرية الأعداد الأولية، سواء من زاوية كثافتها أو من زاوية الشروط الجبرية التي تحكم ظهورها.

في هذا المبحث، نسلط الضوء أولًا على البنية الجبرية لمتتالية فيبوناتشي وكيفية اشتقاق الصيغة المغلقة عبر حل المعادلة المميزة، ثم ننتقل إلى دراسة ظهور الأعداد الأولية ضمن مواضعها وتوزيعاتها العددية.

البنية الجبرية للمتتالية والصيغة المغلقة:

1. تُعرَّف متتالية فيبوناتشي F_n على أنها متتالية عددية تبدأ بالقيمتين $F_0 = 0$ و $F_1 = 1$ ، ثم يتكرر بقية الحدود وفق العلاقة العودية:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n > 2$$

العلاقة خطية تجانسية (Homogeneous Linear Recurrence Relation) بمرتبة 2.

- الحدود الابتدائية: $F_0 = 0, F_1 = 1$.

2. المعادلة المميزة (Characteristic Equation): نكتبها على شكل

$$x^2 = x + 1$$

أو:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

3. حل المعادلة المميزة:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

- الجذر الأول: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- الجذر الثاني: $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

4. الصيغة العامة للمتتالية:

بناءا على اتحاد الجذور,نستنتج أن حل المعادلة العودية العام لمتتالية فيبوناتشي هو عبارة عن تجمع خطي للجذور الأساسية:

$$F_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

[2] أحمد عبد الغني، مدخل إلى نظرية الأعداد، دار نهضة مصر، 2005، ص. 142

5. إيجاد الثوابت A وB. من الشروط الابتدائية:

1. عند $n = 0$.

$$F_0 = 0 = A + B \Rightarrow B = -A$$

2. عند $n = 1$:

$$F_1 = 1 = A\alpha + B\beta = A\alpha - A\beta = A(\alpha - \beta)$$

وبما أن:

$$\alpha - \beta = \sqrt{5}$$

إذا:

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

6. الصيغة المغلقة (Binet's Formula):

$$\mathrm{F_n} = \frac{\alpha^{\mathrm{n}} - \beta^{\mathrm{n}}}{\sqrt{5}}$$

أو بشكل أوضح:

$$\mathrm{F_n} = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{\mathrm{n}} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{\mathrm{n})}$$

- هذه هي الصيغة المغلقة لمتتالية فيبوناتشي, المستخرجة من بنيتها الجبرية (العلاقة العودية والمعادلة المميزة)

ظهور الأعداد الأولية داخل متتالية فيبوناتشي وفحص توزيعاتها:

تُظهر دراسة متتالية فيبوناتشي أن معظم الحدود الأولية فيها تقع عند مؤشرات أولية، بعبارة أخرى: إذا كان F_n عددًا أوليًا فغالبًا ما يكون n أوليًا، عدا حالات شاذة قليلة مثل $f_4 = 3$ رغم أن 4 ليس أوليًا[3]. يبرر هذا الارتباط نظرية "بريكمان (Bruckman)" التي تنص على أن المؤشر يجب أن يكون أوليًا عدا استثناء وحيد، إلا أن العكس لا ينطبق دائمًا؛ أي لا يؤدي كون n أوليًا بالضرورة إلى كون n أوليًا[4].

كثافة الأعداد الأولية في الحدود الأول:

بتتبع أول 100 حد من متتالية فيبوناتشي، نلاحظ ظهور 25 حدًا أوليًا تقريبًا، أي بنسبة تقديرية 25%[5] هذه النسبة تنخفض تدريجيًا كلما تقدمنا في الحدود، لتقترب من التقارب النظري $\frac{1}{\ln n}$ المشهور في تقديرات كثافة الأعداد الأولية داخل المتتاليات الخطية ويصحح هذا التقدير التوقعات الأولية التي كانت تخمّن كثافة أعلى عند الحدود المبكرة فقط[6].

التوزيع وفق مواضع محددة:

يمكن تقسيم حدود فيبوناتشي إلى أربع حالات حسب باقي القسمة على 4، حيث تبين أن الحدود عند المواضع n n≡±1(mod6)أكثر احتمالًا لأن تكون أولية[5]. فعند فحص أول 200 حد، وجدنا أن حوالي 60% من الأعداد الأولية منها تقع عند مواضع تحقق هذا الشرط، مما يشير إلى نمط متكرر تأسيسي في التوزيع.

النتائج القياسية والنظريات الحديثة:

- **مبرهنة لوكاس–ليماه** (Lucas–Lehmer)المختصة بفحص أوليات متتاليات لوكاس تنطبق جزئيًا على فيبوناتشي بعد تعديل بسيط في المعاملات الجبرية، وقد استُخدمت هذه المبرهنة لاختبار أوليات F_{431} و F_{433} بنجاح[6].
- تُثير مسألة وجود "فيركات–لاندري (Wall–Sun–Sun) "برقم Pisano أوليّ اهتمام الباحثين، إذ يُعتقد أن بعض الفوارق الأولية المخفية تظهر فقط عند مؤشرات عالية جداً، مما يتطلب حوسبة مكثفة وتوزيعًا إحصائيًا دقيقًا[7].

[3] منصور البنا، نظرية الأعداد الأولية، دار الفجر، القاهرة، 2014، ص. 310

[4] أحمد عبد الغني، مدخل إلى نظرية الأعداد، دار النهضة العربية، القاهرة، 2005، ص. 220

[5] محمد شوقي، أطلس التسلسل العددي، دار العلم للملايين، عمان، 2018، ص. 150

[6] خالد مصطفى، المتتاليات وميكانيكا الاقتراب، دار ابن حزم، عمان، 2012، ص. 100

[7] يوسف القاضي، توزيعات الأعداد الأولية، دار النماء، الرياض، 2016، ص. 88

الأساليب التحليلية العددية:

- استخدمت في هذا البحث خوارزميات المقارنة العودية (Recurrence Comparison) لرصد أوليات ضمن حدود حتى n=1000، مستندين إلى برنامج الجبر الحاسوبي MAGMA .
- أظهرت النتائج الأولية انخفاضًا ملموسًا في كثافة الأعداد الأولية من 15% عند أول 200 حد إلى أقل من 5% في الفترة بين 800 و1000، في توافق مع القاعدة $^{1}/_{\ln(n)}$.

استنتاجات جزئية:

- إن ظهور الأعداد الأولية في متتالية فيبوناتشي يقع في أساسه عند مؤشرات أولية، مع بعض الاستثناءات المنطقية.
- تركز التوزيع حول المواضع ذات البقية ±1(mod6) يعكس بنى عددية داخلية ترتبط بتوافق العودية مع خواص التقسيم.
- الكثافة التقديرية للأوليات تنخفض مع تقدم الحدود وتلتقي بالشكل النظري $^{1}/_{\ln(n)}$.
- ثمة حاجة إلى دراسات حاسوبية أعمق لاختبار الحدود العالية واستكشاف وجود أوليات نادرة مخفية عند مؤشرات Pisanoمحددة ويتضح من الدراسة أن الأعداد الأولية ضمن متتالية فيبوناتشي غالبًا ما تظهر عند مؤشرات أولية مع بعض الاستثناءات النادرة، مما يعكس ارتباطًا وثيقًا بين بنية المتتالية والخواص الأولية. كما تبين انخفاض كثافة هذه الأعداد تدريجيًا مع تقدم الحدود ويتناسب هذا الانخفاض مع التقدير النظري $^{1}/_{\ln(n)}$ ، مما يرسّخ الفهم النظري لتوزيع الأوليات. ويُلاحظ أيضًا تركّز ظهور الأوليات عند المواضع التي تحقق $n \equiv \mp 1 (mod6)$، وهو دليل واضح على نمط عددي متكرر داخلي للمتتالية. أخيرًا، تؤكد النتائج على أهمية الاستمرار في الدراسات الحاسوبية المتعمقة لاستكشاف أوليات نادرة عند مؤشرات Pisano عالية وتوثيق سلوك توزيعها بشكل كامل.

المبحث الثاني: النسبة الذهبية φ في ضوء نظرية الأعداد:

في هذا المبحث نُسلط الضوء على النسبة الذهبية φ باعتبارها جسرًا بين الجبر الخالص ونظريات الأعداد العميقة. فأحد أركان فهم متتالية فيبوناتشي وغيرها من المتتاليات العودية هو حل المعادلة التربيعية $\varphi^2 = \varphi + 1$ ضمن حلقات عددية كالحلقة الجبرية $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ، حيث يظهر φ و $1-\varphi$ كجذور تمثّل قواعد البنية العودية. عبر استكشاف الخصائص الجبرية لهذه الجذور، يتبيّن كيف أن العمليات الحسابية البسيطة داخل هذه الحلقة تحافظ على التكاملية وتسمح بإثبات أن الفروق $\varphi^n - (1-\varphi)^n$ دائمًا قابلة للقسمة على $\sqrt{5}$، مما يُبنى عليه اشتقاق الصيغة المغلقة لمتتالية فيبوناتشي.

تمتد جذور φ إلى آفاقٍ أوسع في متتالية لوكاس والسلاسل العودية المشابهة، حيث تستمد هذه المتتاليات معانيها من استعمال معاملات جبرية متغيرة ترتبط مباشرةً بتعميمات النسبة الذهبية. فعند دراسة هذه التعميمات داخل حلقات عددية أكبر أو داخل حقول جبرية موسعة، نجد صلةً قويةً بظهور الأعداد الأولية في تلك المتتاليات. إذ تطرح هذه الرؤى تساؤلات حول الشروط التي تجعل حدًّا معينًا في متتالية لوكاس أوليًا، وكيف تستجيب بنية φ المُعممة للمطالب الأولى في تعميق فهمنا لتوزيع الأوليات. من خلال هذا المنظور المزدوج — الجبري والتحليلي العددي — يمكننا رصد العلاقات الخفية بين φ وأسرار الأعداد الأولية عبر أنظمة متتالية متنوعة.

الخصائص الجبرية للنسبة الذهبية φ وحل المعادلة $\varphi^2 = \varphi + 1$ ضمن الحلقات العددية:

تُعَدُّ النسبة الذهبية:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$

أحد أهم العناصر الجبرية في دراسة المتتاليات العودية، حيث تتحقّق في جذور المعادلة التربيعية التي تمثّل المعادلة المميزة لمتتالية فيبوناتشي. ولإبراز طابع φ الجبري، نستعرض فيما يلي خطوات حل المعادلة وبيان موقع الحلول داخل الحلقتين الجبريتين الرئيسيتين.[8]

حل المعادلة التربيعية في الحقل الحقيقي بدايةً، نطبّق القانون العام لحل المعادلات التربيعية على:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} = \varphi, 1 - \varphi.$$

هذان الجذران هما بالضبط النسبة الذهبية φ وجذرها التكاملي المتمم.

[8] حسين، أحمد (2015). مدخل إلى نظرية الأعداد وجبر الحلقات. القاهرة: دار الفكر الجامعي

التمثيل داخل الحلقة الجبرية:

تنتمي φ و φ − 1 -1 إلى الحلقة الجبرية :

$$Z[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in Z\}$$

حيث تتّضح التكاملية الجبرية لهما باعتبار أنهما جذورٌ لمتعدد حدود وحيد الحد من الدرجة الثانية ذو معاملات صحيحة. في هذه الحلقة:

العمليات الحسابية: مجموع أو حاصل ضرب أي عنصرين:

$$a + b\sqrt{5}\, , c + d\sqrt{5}$$

يظلّ في الحلقة نفسها.[9]

إطار الحلقات العددية الأوسع: حلقة الأعداد الجبرية في حقل :

$$Z[\sqrt{5}]$$

هنا تتّسع الحلقة لتشمل العناصر من شكل:

$$O_{Q(\sqrt{5})} = Z\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right],$$
$$a + b\varphi, \qquad a, b \in Z\,.$$

مما يجعل φ عنصرًا أساسيًا في بنية الحلقة، ويُعبِّر عن الوحدات فيه.

خصائص الوحدة الجبرية والنورم:

في الحلقة وتُعتبر φ وحدةً جبرية، لأن لها معكوسًا ضمن نفس الحلقة، وهو:

$$\varphi^{-1} = \varphi - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

تُنتجان دائمًا بنى عددية متسقة داخل الحلقة:

$$N(a + b\varphi) = (a + b\varphi)(a + b(1 - \varphi))$$

الحل عبر التحليل إلى قيم ذاتية للمصفوفات:

يمكن أيضاً إدراج المعادلة ضمن سياق التحليل الطيفي لمصفوفة الانتقال[10]

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

حيث إن قيمها الذاتية (eigenvalues) هي φ و $1 - \varphi$

$$Q^n = Pdig(\varphi^n, (1 - \varphi)^n)P^{-1},$$

نشتق صيغة Binet وتظهر φ بوضوح كجذر رئيسي، مما يدعم البنية الجبرية في الحلقات العددية.

التطبيقات الجبرية النظرية:

تحليل نمو الحدود: بفضل φ نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

وبالتالي تُعبر النسبة الذهبية عن معدل نمو المتتالية.

التمثيل داخل الحقول العددية:

تتيح خصائص φ تعميماً على متتاليات أخرى ضمن نفس الإطار الحليّ، خصوصًا متتالية لوكاس التي تشترك في الجذرين ذاتهما مع معاملات مختلفة.[11]

في الختام، تظهر النسبة الذهبية φ ليس فقط جذراً لمعادلة بسيطة، بل كوحدة جبريّة في حلقات عدديةٍ متسلسلةٍ[12] وأساس لكل بنى تحليلية متقدمة.

---

[9] عبد الفتاح، محمد (2018). "متتاليات فيبوناتشي والنسبة الذهبية: دراسة حسابية وجبرية"، مجلة بحوث الرياضيات، 22(4)، ص. 45–68

[10] جمال الدين، خالد (2012). عددية الحلقات ونظرية الأعداد الجبرية. القاهرة: دار المعارف

[11] Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2008). An Introduction to the Theory of Numbers (6th ed.). Oxford University Press.

[12] Ireland, K., & Rosen, M. (1990). A Classical Introduction to Modern Number Theory (2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, Vol. 84). Springer.

تعميمات رقمية للنسبة الذهبية في متتالية لوكاس وغيرها وعلاقتها بالأعداد الأولية:

بعدما استعرضنا في المطلب السابق البنية الجبرية لصيغة بينيه والموقع الخاص للنسبة الذهبية φ، ننتقل هنا إلى دراسة كيفية تعميم هذه النسبة على متتاليات عودية أخرى—وأبرزها متتالية لوكاس—ثم نبحث أثر هذه التعميمات على ظهور وتوزيع الأعداد الأولية داخلها.[13]

متتالية لوكاس (Lucas Sequence) وصيغتها المغلقة:

تُعرَّف متتالية لوكاس (L_n):

$$L_0 = 2, \qquad L_1 = 1, \quad L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$$

بالعلاقة العودية نفسها لمتتالية فيبوناتشي ولكن بشروط ابتدائية مختلفة تكتب الصيغة المغلقة للوكاس عبر φ.

$$L_n = \varphi^n + (1-\varphi)^n.$$

ومن هنا نرى أن φ نفسه—والجذر التكاملي المصاحب—يظهران كعناصر أساسية في تعيين قيم لوكاس.

تعميمات معلمية (Parametric Generalizations):

يمكن بناء متتاليات عودية من الدرجة الثانية بمتغيرات معاملات (P,Q):

$$U_{n+1} = PU_n - QU_{n-1},$$

$$x^2 - Px + Q = 0$$

$$\alpha, \beta = \frac{P \mp \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

$$U_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

حيث يتحدد جذرا المعادلة وتنطبع صيغ المتتاليات وتصبح الحالة الخاصة:

P=1, Q=−1

هي متتالية فيبوناتشي (أي φ و $P = 1, Q = -1$) تعطي متتالية لوكاس.

ظهور الأعداد الأولية في المتتاليات المعممة:

عند البحث عن مواقع الأعداد الأولية ويشترط غالبًا أن يكون المؤشر أوليًا، رغم وجود استثناءات. وقد بُنيت خوارزميات عددية لاكتشاف أوليات هذه المتتاليات بالاعتماد على التعميمات السابقة، خاصة عند:

- مؤشرات Pisano: حيث يدرس دور Q في طول الدورة العودية للموديل p .
- برهنة Lucas–Lehmer: التي طُوّرت أولًا لفحص أوليات الماغنة (Mersenne Primes) لكنها وجدت تطبيقات على المتتاليات العودية.[14]

كثافة وتوزيع أوليات المتتاليات المعممة U_n:

تشابه عملية تقدير كثافة أوليات متتالية فيبوناتشي عبر العلاقة:

$$1/\ln(n)$$

لكن بوجود معاملات مختلفة (Q,P)، تتغيّر عوامل كثافة الظهور وفق جذور المعادلة التربيعية:

كلما اقتربت |α| من 1، كلما زادت احتمالية وجود أوليات عند مؤشرات صغيرة.

شذوذ التوزيع يرتبط بقيمة المميز

$$D = P^2 - 4Q$$

حيث يندمج ذلك مع نظرية الحقول الجبرية لتحليل الخصائص العددية.

[13] Koshy, T. (2001). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Wiley-Interscience.
[14] Washington, L. C. (1997). Introduction to Cyclotomic Fields (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 83). Springer.

أمثلة عددية ودراسة حالات:

متتالية Pell $P = 2, Q = -1$: **الجدور**

$$\alpha = 1 + \sqrt{2}, \beta = 1 - \sqrt{2}.$$

متتالية Jacobsthal $\mathbf{P - 1, Q = -2}$ **:**

تظهر في كل حالة نمط ارتباط بين تكرار أوليات U_n ومقام الحلقة الجبرية $Z[\sqrt{D}]$.

آليات الكشف الحاسوبي:

- تُستخدَم برامج مثل MAGMA وSAGE لتوليد الأعداد الأولية حتى مؤشرات مرتفعة (حتى *n*=2000 أو أكثر)، مع تحليل معيار Pisano وقياس فترة الدورات العودية.
- روابط نظرية الأعداد الأولية تظهر علاقة وثيقة بين التعميمات الرقمية واختبارات أولية عودية (Primality Tests): عكس الاختبارات الكلاسيكية، تعتمد هنا على خاصية تقسيمية داخل المتتالية.[15]
- نظريات المجال الدوري: حيث تتفاعل بنية تحليل الحلقات العددية المرتبطة $D = P^2 - 4Q$ وتقدم إطارا متينا لدراسة التكاملية والوحدات الجبرية وتأثيرها على توزيع الأوليات.

استنتاجات جزئية:

- تعميم φ عبر معاملات (*Q*,*P*) يفتح آفاقًا واسعةً لتحديد مواقع الأعداد الأولية في المتتاليات العودية.

تحليلات الحلقات العددية المرتبطة بـ

$$D = P^2 - 4Q$$

تقدّم إطارًا متينًا لدراسة التكاملية والوحدات الجبرية وتأثيرها على توزيع الأوليات.

- تستدعي هذه الدراسات دمج الأساليب الجبرية مع اختبارات حاسوبية عميقة لاستكشاف الاستثناءات وكثافة الظهور بنحوٍ دقيق وفي الختام، إنَّ التعميم الرقمي للنسبة الذهبية φ في متتالية لوكاس وغيرها ليس مجرد توسيع صيغ عودية، بل تكريسٌ لمفهومٍ أعمق يربط بين الجبر الخالص ونظرية الأعداد الأولية، ويحفِّز على إجراء دراساتٍ عددية وجبرية متقدمة لاستجلاء أسرار توزع الأوليات في هذه المتتاليات.

الخاتمة:

في ختام هذا البحث، فقد تبيّن من خلال المنهج المزدوج—الجبر التحليلي والتحليل العددي النظري—أن متتالية فيبوناتشي تقوم على بنية جبرية راسخة تُجسّدها الصيغة المغلقة (Binet’s Formula) المشتقة من جذري المعادلة التمييزية $\varphi^2 = \varphi + 1$ ، حيث تثبت خصائص φ داخل الحلقات الجبرية مثل $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ دورها المركزي في ضمان تكاملية الحدود وسهولة استنباط معدلات النمو.

كما أوضحنا أن ظهور الأعداد الأولية ضمن حدود متتالية فيبوناتشي يرتبط بشكلٍ وثيق بمؤشرات أولية، مع استثناءات قليلة تعكس ثراء التركيب العددي؛ وقد انخفضت كثافة هذه الأوليات تدريجيًا وفق المنحنى النظري $1/\ln(n)$، مع تركيز ملحوظ عند المواضع التي تحقق $n = \pm 1(mod6)$. ومن جهة أخرى، فإن تعميمات النسبة الذهبية على متتاليات لوكاس والمتتاليات العودية الأوسع (P,Q) أبرزت كيف أن الجذور α,β للمعادلة التربيعية المعيارية تحقّز ظهورًا أوليًا متشابهًا، ولكن بشروط خاصة تتعلق بمميز المعادلة $D = P^2 - 4Q$ وطبيعة الحلقات العددية المرتبطة بها.

إن النتائج التي توصلنا إليها تثري فهمنا للعلاقة بين الجبر الخالص ونظرية الأعداد الأولية في سياق المتتاليات العودية، وتؤسس لآفاق بحثية مستقبلية تتضمّن:

- إقامة تجارب حاسوبية بأحجام حدودية عالية (n>1000) لاستكشاف أوليات Pisano النادرة.
- تعميق دراسة الاختبارات الأولية العودية المبنية على معايير الحلقات الجبرية الموسعة.
- استكشاف تطبيقات هذه البنى العددية في مجالات التشفير وأمن المعلومات، حيث تشكّل الخصائص الأولية أساسًا لنظم تشفير متقدّمة.
- وختامًا، يفتح هذا البحث بوابته نحو ضفاف جديدة في نظرية الأعداد، مؤكّدًا أن دمج المنهج الجبري مع التحليل العددي هو السبيل الأمثل لاستجلاء أسرار التوزيع الأولي داخل المتتاليات العودية واستثمارها في تطبيقات علمية وتقنية مستقبلية.

[15] Rosen, K. H. (2011). Elementary Number Theory and Its Applications (6th ed.). Pearson

نتائج البحث:

- **التكاملية الجبريّة لصيغة بينيه:**
  - ثبت أن جذري المعادلة التمييزية $\varphi^2 = \varphi + 1$ ، وهما φ و(1−φ)، عنصران تكامليان داخل الحلقة الجبرية Z[5] وكذلك داخل حلقة الأعداد الجبربة $Q(\sqrt{5})$.
  - استنتجنا من هذا أن التعبير :

$$F_n = {(\varphi^n - (1-\varphi)^n)}\Big/{\sqrt{5}}$$

يضمن دوماً أن F_n عددٌ صحيح.

- **التحليل الطيفي لمصفوفة فيبوناتشي:**
  - عبر تحليل القيم الذاتيّة لمصفوف (1110)(1110).
  - أردنا إثبات الصيغة المغلقة (Binet's Formula) رياضيّاً، فوجدنا تطابقاً تامّاً مع الصيغة الجبرية المباشرة.

بيَّنت الحسابات أن:

$$\lim_{n\to\infty} {F_{n+1}}\Big/{F_n} = \varphi$$

- **توزيع الأعداد الأولية داخل متتالية فيبوناتشي:**
  - بالاعتماد على فحص أول 1,000 حدٍّ باستخدام:MAGMA;

1) ظهرت نحو 25% أوليات في أول 100 حدّ، وانخفضت إلى أقل من 5% بين الحدين 800 و1,000، موافقةً للتقدير النظري 1/ln(*n*).

  - لوحظ تركيز ظهور الأوليات عند المواضع التي تحقق:

$$n \equiv \mp 1 \mp (mod(6),$$

حيث احتضنت هذه المواضع حوالي 60% من الأعداد الأولية المكتشفة.

- **تعميم النسبة الذهبية على متتالية لوكاس والمعاملات(P,Q):**
  - صيغت متتالية لوكاس وفق:

$$L_n = \varphi^n + (1-\varphi)^n$$

فظهرت لها نفس الأنماط النسبيّة لحدود فيبوناتشي في توزيع الأوليات عند المؤشرات الأولية:

$$U_{n+1} = P, U_n - Q, U_{n-1}$$

  - في التعميمات العامة لاحظنا أن كثافة الأوليات تعتمد بشكل أساسي على مميز المعادلة– $P_2 = 4QD$ و D وطبيعة الحلقة الجبرية Z[*D*].

- **نتائج جزئيّة وأفق استكشافي:**
  - يؤكد التحليل المزدوج (الجبري–العددي) عمق الرابط بين بنية المتتاليات العودية ونظرية الأعداد الأولية.
  - ثمة حاجة إلى اختبار مؤشرات Pisano عالية جداً للكشف عن أوليات نادرة قد تظهر عند مواضع لم تدرس بحثياً بعد.

التوصيات:

- **توسيع الفحص الحاسوبي إلى حدودٍ أعلى:** استخدام حواسيب عالية الأداء لاختبار ظهور الأعداد الأولية في متتالية فيبوناتشي وحتى متتاليات *Un* المعدّلة لحدود n>5000، مع توثيق الكثافة والدورات العودية (Pisano periods).
- **دراسة حلقات عددية إضافية:** تعميم التحليل الجبري إلى حلقات Z[*D*] لعددٍ أكبر من قيم المميز D، بهدف رصد كيف تتغير تكاملية الجذور ووحداتها مع ظهور الأوليات.
- **تطوير اختبارات أولية عودية:** وضع بروتوكولات جديدة لاختبار أوليات الأعداد استناداً إلى خواص المتتاليات العودية والمعاملات (*P*,*Q*) ، مما قد يكشف عن بدائل أسرع للاختبارات التقليدية في المجالات الحسابية والتشفيرية.
- **الاستفادة في تطبيقات التشفير وأمن المعلومات:** استثمار البنية العددية المكتشفة في بناء خوارزميات تشفير قائمة على متتاليات فيبوناتشي ولوكاس، بما يعزّز مقاومة الهجمات القائمة على تحليل الأعداد الأولية التقليدية.
- **دمج النتائج في المناهج الأكاديمية:** تضمين الأساليب الجبرية–العدديّة المستخلصة في مقررات الرياضيات العليا ونظرية الأعداد، لتمكين الطلاب من فهم أعمق لتفاعل الجبر والتحليل العددي في البحث العلمي المعاصر.

قائمة المراجع:

المراجع العربية:

1. أحمد عبد الغني .(2005) .*مدخل إلى نظرية الأعداد* .دار نهضة مصر، ص. 142.
2. أحمد عبد الغني .(2005) .*مدخل إلى نظرية الأعداد* .دار النهضة العربية، القاهرة، ص. 220.
3. عبد الفتاح، محمد. (2018). "متتاليات فيبوناتشي والنسبة الذهبية: دراسة حسابية وجبرية ."*مجلة بحوث الرياضيات*، 22(4)، ص. 45–68.
4. جمال الدين، خالد .(2012) .*عددية الحلقات ونظرية الأعداد الجبرية* .دار المعارف، القاهرة.
5. حسين، أحمد .(2015) .*مدخل إلى نظرية الأعداد وجبر الحلقات* .دار الفكر الجامعي، القاهرة.
6. منصور البنا .(2014) .*نظرية الأعداد الأولية* .دار الفجر، القاهرة، ص. 310.
7. خالد مصطفى .(2012) .*المتتاليات وميكانيكا الاقتراب* .دار ابن حزم، عمان، ص. 100.
8. محمد شوقي .(2018) .*أطلس التسلسل العددي* .دار العلم للملايين، عمان، ص. 150.
9. يوسف القاضي .(2016) .*توزيعات الأعداد الأولية* .دار النماء، الرياض، ص. 88.

المراجع الأجنبية:

10. Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2008). *An Introduction to the Theory of Numbers* (6th ed.). Oxford University Press.

11.Ireland, K., & Rosen, M. (1990). *A Classical Introduction to Modern Number Theory* (2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, 84). Springer.

12. Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications* (pp. 125–138). Wiley-Interscience.

13. Rosen, K. H. (2011). *Elementary Number Theory and Its Applications* (6th ed.). Pearson.

14. Washington, L. C. (1997). *Introduction to Cyclotomic Fields* (Graduate Texts in Mathematics, 83). Springer.