The North African Journal of Scientific Publishing (NAJSP)
مجلة شمال إفريقيا للنشر العلمي (NAJSP)
E-ISSN: 2959-4820
Volume 3, Issue 3, 2025
Page No: 356-363
Website: https://najsp.com/index.php/home/index
SJIFactor 2024: 5.49 معامل التأثير العربي (AIF) 2024: 0.71 ISI 2024: 0.696

بعض نتائج تذبذب المعادلات التفاضلية المحايدة ذات التأخير من الرتبة الرابعة

الهاشمي علي الهاشمي ادراه [1]، ابتسام شعبان سالم المحبرش [2*]
[1,2]قسم الرياضيات، كلية التربية، الجامعة الاسمرية الاسلامية، زليتن، ليبيا

Some Results on The Oscillation of Fourth-Order Neutral Delay Differential Equations

Alhashimi Ali Alhashimi Idarah [1], Ebtesam Shaaban Almehabresh [2*]
[1,2] Department of Mathematics, Faculty of Education, AL Asmarya Islamic University, Zliten, Libya

*Corresponding author e.almehabresh@asmarya.edu.ly *المؤلف المراسل
تاريخ الاستلام: 2025-07-22 تاريخ القبول: 2025-09-16 تاريخ النشر: 2025-09-22

الملخص

يهدف هذا البحث إلى دراسة الخصائص التذبذبية لحلول المعادلات التفاضلية المحايدة من الرتبة الرابعة ذات التأخير الزمني. وقد تم استنتاج معايير جديدة لتذبذب حلول هذه المعادلات بالاعتماد على أدوات التحليل الرياضي ونظرية المقارنة. كما يمثل هذا العمل امتدادًا وتعميمًا للعديد من النتائج التي وردت في الدراسات السابقة في هذا المجال. ومن الجدير بالذكر أن البحث يقدم إضافات نوعية في تحليل السلوك التذبذبي لهذه الفئة من المعادلات التفاضلية. تُعد النتائج المُقدمة في هذه الدراسة تطويرًا للمعرفة الحالية في مجال المعادلات التفاضلية المحايدة عالية الرتبة.

الكلمات المفتاحية: معادلة تفاضلية، معايير تذبذب، معادلات تفاضلية من الرتبة الرابعة، المعادلات التفاضلية المحايدة ذات التأخير.

Abstract

This research aims to investigate the oscillatory properties of solutions to fourth-order neutral delay differential equations. New criteria for the oscillation of these solutions have been derived based on mathematical analysis tools and comparison theory. This work also represents an extension and generalization of numerous results reported in previous studies within this field. Notably, the research provides qualitative contributions to the analysis of the oscillatory behavior of this class of differential equations. The findings presented in this study constitute an advancement in the current knowledge of high-order neutral differential equations.

Keywords: Differential equation, Oscillation criteria, Fourth-order differential equations, Neutral delay differential equations.

مقدمة:

تهدف هذه الورقة الى دراسة تذبذب معادلات التأخير التفاضلية المحايدة من الرتبة الرابعة (NDDES).

$$\left(a_3(u)\left[\left(a_2(u)\left(a_1(u)\Omega'(u)\right)'\right)'\right]^{\gamma}\right)' + q(u)y^{\beta}\left(\rho(u)\right) = 0,\ u \geq u_0 \qquad (1)$$

حيث

$$\Omega(u) = y(u) + h(u)y\big(k(u)\big),$$

γ و β تمثل حاصل قسمة اعداد صحيحة فردية موجبة. تحقق الشروط

i. $a_i \in C^{4-i}\big([u_0,\infty),(0,\infty)\big), i = 1,2,3$

$$\int_{u_0}^{\infty} \frac{1}{a_3^{\frac{1}{\gamma}}(s)} ds = \infty,\ \int_{u_0}^{\infty} \frac{1}{a_i(s)} ds = \infty,\ i = 1,2. \qquad (2)$$

ii. $k,\rho \in C\big([u_0,\infty),(0,\infty)\big), k(u) < u, \rho(u) < u, \lim_{u\to\infty} k(u) = \lim_{u\to\infty} \rho(u) = \infty.$

iii. $h,q \in C\big([u_0,\infty),(0,\infty)\big),\ q(u) > 0, 0 \le h(u) < h_0 < \infty.$

يمثل الحل المدروس للمعادلة (1) دالة حقيقية y قابلة للتفاضل أربع مرات، ولها خاصية

$$a_3(u)\big[\big(a_2(u)\big(a_1(u)\Omega'(u)\big)'\big)'\big]^{\gamma} \in C^1\big([u_0,\infty),(0,\infty)\big)$$

يشكل فهم ودراسة المعادلات التفاضلية وتحليلها حجرَ أساسٍ للعديد من التخصصات في الرياضيات والهندسة والفيزياء، حيث تركّز جميعها على استكشاف خصائص هذه المعادلات (DEs) بأشكالها المتنوّعة.

من المعروف أنّ العديد من العمليات التكنولوجية والفيزيائية والبيولوجية تُنمذَج عبر المعادلات الديناميكية، ويظلّ وجود الحلول ووحدانيّتها محوراً جوهرياً في دراستها. إلا أنّ إيجاد حلول تحليلية مغلقة للمعادلات التفاضلية الديناميكية غير الخطية - الناتجة عن نمذجة الظواهر المختلفة - غالباً ما يكون مستحيلاً، مما يدفعنا إلى اعتماد التقنيات العددية كبديل لتقريب النتائج [1].

تحظى المعادلات التفاضلية المحايدة ذات التأخير (NDDEs) باهتمام بحثي كبير؛ نظرًا لتطبيقاتها الواسعة في العلوم الطبيعية والهندسية. تُصنَّف المعادلة على أنها "محايدة" عندما يظهر أعلى مشتق للدالة في كلا المصطلحين المتأخر زمنيًّا (المحتوي على تأخير) وغير المتأخر (الخالي من التأخير). تُمثِّل هذه المعادلات أنظمةً تعتمد على القيم الحالية والمتأخرة للدالة ومشتقاتها، وتلعب دورًا محوريًّا في نمذجة الأنظمة الديناميكية الزمنية المتأخرة. وتعود أهميتها إلى تطبيقاتها متعددة المجالات في الهندسة، والفيزياء، والبيولوجيا؛ مما يجعل دراستها أساسية لفهم سلوك الأنظمة المعقدة الحاوية على تأخير في متغيراتها. تُظهِر الأدبيات العلمية تركيزًا ملحوظًا على دراسة تذبذب وتقارب حلول المعادلات التفاضلية بمختلف أنواعها ومنها [2]، [3]، [4]، [5].

شَهِد العقد الأخير طفرة في أبحاث نظرية التذبذب، فمثلاً تحتوي المراجع [6]، [7] على معادلات مختلطة، تحتوي المراجع [8]، [9]، [10]، [11]، [12]، [13]، [14] على معادلات محايدة، و تظهر الأبحاث [15]، [16] التقدم في دراسة معادلات الرتب العليا. كما اهتمت الدراسة [17] بالمعادلات الكسرية والدراسات [18]، [19] بالمعادلات الديناميكية.

معظم الدراسات المنشورة مؤخراً حول المعادلات التفاضلية المحايدة ذات التأخير من الرتبة الرابعة تناولت المعادلة (1) عندما $a_1(u), a_2(u) = 1$ وعندما $\beta = \gamma = 1$ ومنها Masood et al [20] حيث تمت دراسة المعادلة (1) عندما تكون $a_1(u), a_2(u) = 1$ وعندما تكون $\beta = \gamma$، حيث أُشتُقّت معايير التذبذب باستخدام منهجية تجمع بين المتباينات الرياضية ونظرية المقارنة.

كما درس Bazighifan et al [21] المعادلة (1) عندما $a_1(u), a_2(u) = 1$. مؤخراً ركز Nabih et al [22] على دراسة تذبذب المعادلة (1) عندما $a_1(u), a_2(u) = 1$ ، $\beta = \gamma$ وباستخدام أسلوب المقارنة والصيغة العامة لريكاتي، تم استنباط معايير جديدة استبعدت الحلول الموجبة المتناقصة. كما تم دراسة المعادلة (1) من قبل Waed et al [23] عندما تكون $\beta = \gamma = 1$.

تمثل هذه الدراسة امتدادًا وتطويرًا للنتائج السابقة، حيث تقدم معايير جديدة لتذبذب الحلول باستخدام أدوات التحليل الرياضي المتقدمة. تُعتبر النتائج المقدمة في هذا البحث إضافة نوعية للمعرفة الحالية في مجال المعادلات التفاضلية المحايدة عالية الرتبة، حيث توفر فهماً أعمق للسلوك التذبذبي لهذه الفئة المهمة من المعادلات.

بداية سنقدم النتائج المساعدة الآتية:

تعريف 1. [21] إذا كان أي حل y للمعادلة (1) ليس حل ذو نهاية موجبة ولا ذو نهاية سالبة، فيقال ان الحل متذبذب، واذا كانت جميع حلول المعادلة التفاضلية متذبذبة فإن المعادلة التفاضلية تسمى معادلة تفاضلية متذبذبة.

نتيجة 1. [21] بفرض ان $z_1,\ z_2 \ge 0$ و β عدد حقيقي موجب فإن:

$$(z_1 + z_2)^{\beta} \le 2^{\beta-1}\big(z_1^{\beta} + z_2^{\beta}\big), \forall\ \beta \ge 1$$

و

$$(z_1 + z_2)^{\beta} \le z_1^{\beta} + z_2^{\beta}, \forall\ \beta \le 1$$

نتيجة 2. [23] بفرض ان (2) متحقق وان $y(u)$ حل موجب للمعادلة (1) فإن

$$(a_3[(a_2(a_1\Omega')')']^{\gamma})'(u) \le 0$$

وإما

$$\Omega(u) \in S^- \Leftrightarrow \Omega(u) > 0, \Omega'(u) > 0, (a_1\Omega')'(u) < 0, a_3(u)[(a_2(a_1\Omega')')']^{\gamma}(u) > 0;$$
$$\Omega(u) \in S^+ \Leftrightarrow \Omega(u) > 0, \Omega'(u) > 0, (a_1\Omega')'(u) > 0, a_3(u)[(a_2(a_1\Omega')')']^{\gamma}(u) > 0.$$

ملاحظة 1. S تمثل كل الحلول الموجبة للمعادلة (1)، S^+ تمثل كل الحلول الموجبة ذات النهاية الموجبة للمعادلة (1) و S^- تمثل كل الحلول الموجبة ذات النهاية السالبة للمعادلة (1) حيث

$$S = S^+ \cup S^-$$

معايير التذبذب:

للتبسيط سوف نستخدم الاختصارات الآتية:

$$L = \begin{cases} 1 & if\ \beta \le 1; \\ 2^{\beta-1} & if\ \beta > 1. \end{cases}$$

$$Q(u) = min\left\{q\left(\rho^{-1}(u)\right), q\left(\rho^{-1}\left(k(u)\right)\right)\right\},$$

$$I_1(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{a_1(v)}dv, \qquad I_2(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{a_2(v)}dv, \qquad I_3(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{a_3^{\frac{1}{\gamma}}(v)}dv,$$

$$I_{23} = \int_{u_1}^{u} \frac{1}{a_2(s)} \int_{u_1}^{v} \frac{1}{a_3^{\frac{1}{\gamma}}(v)}dvds,$$

$$I_{123} = \int_{u_1}^{u} \frac{1}{a_1(s)} \int_{u_1}^{s} \frac{1}{a_2(\xi)} \int_{u_1}^{v} \frac{1}{a_3^{\frac{1}{\gamma}}(v)}dvd\xi ds.$$

نتيجة 3. بفرض أن $y \in S^+$ حل للمعادلة (1) فإن

$$\Omega(u) \ge a_3^{\frac{1}{\gamma}}(u)(a_2(a_1\Omega')')'(u)I_{123}(u) \qquad (3)$$

الاثبات: بما ان $y \in S^+$ فإن

$$a_2(u)(a_1\Omega')'(u) \ge \int_{u_1}^{u} \frac{1}{a_3^{\frac{1}{\gamma}}(v)} a_3^{\frac{1}{\gamma}}(v)(a_2(a_1\Omega')')'(v)dv$$

من النتيجة 2

$$a_2(u)(a_1\Omega')'(u) \ge a_3^{\frac{1}{\gamma}}(u)(a_2(a_1\Omega')')'(u) \int_{u_1}^{u} \frac{1}{a_3^{\frac{1}{\gamma}}(v)}dv \qquad (4)$$

$$\Rightarrow a_3^{\frac{1}{\gamma}}(u)(a_2(a_1\Omega')')'(u) \int_{u_1}^{u} \frac{1}{a_3^{\frac{1}{\gamma}}(v)}dv - a_2(u)(a_1\Omega')'(u) \le 0$$

$$\Rightarrow a_3^{\frac{1}{\gamma}}(u)(a_2(a_1\Omega')')'(u)I_3(u) - a_2(u)(a_1\Omega')'(u) \le 0 \qquad (5)$$

هذا يضمن أن

$$\left(\frac{a_2(u)(a_1\Omega')'(u)}{I_3(u)}\right)' = \frac{I_3(u)a_3^{\frac{1}{\gamma}}(u)(a_2(a_1\Omega')')'(u) - a_2(u)(a_1\Omega')'(u)}{a_3^{\frac{1}{\gamma}}(u)I_3^2(u)}$$

$$= \frac{1}{a_3^{\frac{1}{\gamma}}(u)I_3^2(u)}\left[I_3(u)a_3^{\frac{1}{\gamma}}(u)(a_2(a_1\Omega')')'(u) - a_2(u)(a_1\Omega')'(u)\right]$$

من (5) نجد أن

$$\left(\frac{a_2(u)(a_1\Omega')'(u)}{I_3(u)}\right)' \le 0$$

بتطبيق هذه المعلومات نصل الى

$$a_1(u)\Omega'(u) \geq \int_{u_1}^{u} I_3(v)\frac{a_2(v)(a_1\Omega')'(v)}{a_2(v)I_3(v)}dv$$
$$\geq \frac{a_2(u)(a_1\Omega')'(u)}{I_3(u)}\int_{u_1}^{u} I_3(v)\frac{1}{a_2(v)}dv$$
$$= \frac{a_2(u)(a_1\Omega')'(u)}{I_3(u)}\int_{u_1}^{u}\frac{1}{a_2(\xi)}\int_{u_1}^{v}\frac{1}{a_3^{\frac{1}{\gamma}}(v)}dvd\xi = \frac{a_2(u)(a_1\Omega')'(u)}{I_3(u)}I_{23}(u)$$
$$\Rightarrow \Omega'(u) \geq \frac{a_2(u)(a_1\Omega')'(u)}{a_1(u)I_3(u)}I_{23}(u) \qquad (6)$$

من المعادلة (5) نجد ان

$$\Omega'(u) \geq \frac{1}{a_1(u)}a_3^{\frac{1}{\gamma}}(u)(a_2(a_1\Omega')')'(u)I_{23}(u) \qquad (7)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{a_1(u)}a_3^{\frac{1}{\gamma}}(u)(a_2(a_1\Omega')')'(u)I_{23}(u) - \Omega'(u) \leq 0 \qquad (8)$$

وبما أن

$$\left(\frac{a_1(u)\Omega'(u)}{I_{23}(u)}\right)' = \frac{I_{23}(u)a_2(u)(a_1\Omega')'(u) - I_3(u)a_1(u)\Omega'(u)}{a_2(u)I_{23}^2(u)}$$
$$= \frac{1}{a_2(u)I_{23}^2(u)}[I_{23}(u)a_2(u)(a_1\Omega')'(u) - I_3(u)a_1(u)\Omega'(u)]$$

من (6) نجد ان

$$\left(\frac{a_1(u)\Omega'(u)}{I_{23}(u)}\right)' \leq 0$$
$$\Omega(u) \geq \int_{u_1}^{u} I_{23}(v)\frac{a_1(v)\Omega'(v)}{a_1(v)I_{23}(v)}dv \geq \frac{a_1(u)\Omega'(u)}{I_{23}(u)}\int_{u_1}^{u} I_{23}(v)\frac{1}{a_1(v)}dv$$
$$\geq \frac{a_1(u)\Omega'(u)}{I_{23}(u)}\int_{u_1}^{u}\frac{1}{a_1(s)}\int_{u_1}^{s}\frac{1}{a_2(\xi)}\int_{u_1}^{v}\frac{1}{a_3^{\frac{1}{\gamma}}(v)}dvd\xi ds$$
$$= \frac{a_1(u)\Omega'(u)}{I_{23}(u)}I_{123}(u)$$

من المعادلة (6) نجد ان

$$\Omega(u) \geq \frac{a_2(u)(a_1\Omega')'(u)}{I_{23}(u)I_3(u)}I_{23}(u)I_{123}(u)$$
$$= \frac{a_2(u)(a_1\Omega')'(u)}{I_3(u)}I_{123}(u) \qquad (9)$$

من (4) نجد أن

$$\Omega(u) \geq \frac{a_3^{\frac{1}{\gamma}}(u)(a_2(a_1\Omega')')'(u)I_3(u)}{I_3(u)}I_{123}(u)$$
$$\Rightarrow \Omega(u) \geq a_3^{\frac{1}{\gamma}}(u)(a_2(a_1\Omega')')'(u)I_{123}(u)$$

وهو المطلوب.

نظرية 1. بفرض أن

$$k'(u) \geq k_0 > 0 \text{ و } (\rho^{-1}(u))' \geq \rho_0 > 0 \qquad (10)$$

وكذلك

$$\eta'(u) + \frac{1}{L}Q(u)\left(\frac{\rho_0 k_0}{k_0 + h_0^{\beta}}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}\eta^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(k^{-1}(\rho(u))\right)I_{123}^{\beta}(u) \leq 0 \qquad (11)$$

متباينة متذبذبة فإن المعادلة (1) متذبذبة.

الاثبات: بفرض ان للمعادلة (1) حل غير تذبذبي في الفترة $[u_0,\infty)$. بدون اخلال بالعمومية، سنفرض ان $y\in S^+$ حل للمعادلة التفاضلية (1) هذا يعني انه يوجد $u_1\geq u_0$ بحيث لكل $u\geq u_1$ يكون

$$y(u)>0,\ y\big(k(u)\big)>0\ \text{و}\ y\big(\rho(u)\big)>0$$

من النتيجة 2، لدينا

$$\Omega(u)>0,\Omega'(u)>0,(a_1\Omega')'(u)>0,(a_2(a_1\Omega')')'(u)>0 \text{ and } (a_3[(a_2(a_1\Omega')')']^\gamma)'(u)\leq 0 \quad (12)$$

من المعادلة (1) نجد ان

$$\frac{1}{(\rho^{-1}(u))'}\Big((a_3[(a_2(a_1\Omega')')']^\gamma)'\big(\rho^{-1}(u)\big)\Big)+q\big(\rho^{-1}(u)\big)y^\beta\big(\rho^{-1}(u)\big)=0 \quad (13)$$

من تعريف Ω ونتيجة 1، نجد ان

$$\Omega^\beta(u)=\Big(y(u)+h(u)y\big(k(u)\big)\Big)^\beta\leq L\left(y^\beta(u)+h_0^\beta y^\beta\big(k(u)\big)\right) \quad (14)$$

من (13)، (14) نجد ان

$$0=\frac{1}{(\rho^{-1}(u))'}\Big((a_3[(a_2(a_1\Omega')')']^\gamma)'\big(\rho^{-1}(u)\big)\Big)+q\big(\rho^{-1}(u)\big)y^\beta\big(\rho^{-1}(u)\big)+$$
$$h_0^\beta\left(\frac{1}{\big(\rho^{-1}(k(u))\big)'}\Big((a_3[(a_2(a_1\Omega')')']^\gamma)'\left(\rho^{-1}\big(k(u)\big)\right)\Big)+\right.$$
$$\left.q\left(\rho^{-1}\big(k(u)\big)\right)y^\beta\left(\rho^{-1}\big(k(u)\big)\right)\right)$$
$$=\frac{(a_3[(a_2(a_1\Omega')')']^\gamma)'\big(\rho^{-1}(u)\big)}{\big(\rho^{-1}(u)\big)'}+h_0^\beta\frac{(a_3[(a_2(a_1\Omega')')']^\gamma)'\left(\rho^{-1}\big(k(u)\big)\right)}{\left(\rho^{-1}\big(k(u)\big)\right)'}$$
$$+q\big(\rho^{-1}(u)\big)y^\beta\big(\rho^{-1}(u)\big)+q\left(\rho^{-1}\big(k(u)\big)\right)y^\beta\left(\rho^{-1}\big(k(u)\big)\right)$$

من المعادلة (14) نجد ان

$$0\geq\frac{(a_3[(a_2(a_1\Omega')')']^\gamma)'\big(\rho^{-1}(u)\big)}{\big(\rho^{-1}(u)\big)'}+h_0^\beta\frac{(a_3[(a_2(a_1\Omega')')']^\gamma)'\left(\rho^{-1}\big(k(u)\big)\right)}{\left(\rho^{-1}\big(k(u)\big)\right)'}+\frac{1}{L}Q(u)\Omega^\beta(u)$$

من (10) نجد ان

$$0\geq\frac{1}{\rho_0}\Big((a_3[(a_2(a_1\Omega')')']^\gamma)'\big(\rho^{-1}(u)\big)\Big)+\frac{h_0^\beta}{\rho_0k_0}\Big((a_3[(a_2(a_1\Omega')')']^\gamma)'\left(\rho^{-1}\big(k(u)\big)\right)\Big)$$
$$+\tfrac{1}{L}Q(u)\Omega^\beta(u) \quad (15)$$

باستخدام نتيجة 3، نصل الى

$$0\geq\tfrac{1}{\rho_0}\Big((a_3[(a_2(a_1\Omega')')']^\gamma)'\big(\rho^{-1}(u)\big)\Big)+$$
$$\tfrac{h_0^\beta}{\rho_0k_0}\Big((a_3[(a_2(a_1\Omega')')']^\gamma)'\left(\rho^{-1}\big(k(u)\big)\right)\Big)+$$
$$\tfrac{1}{L}Q(u)a_3^{\frac{\beta}{\gamma}}(u)[(a_2(a_1\Omega')')']^\beta(u)I_{123}^\beta(u) \quad (16)$$

الان بوضع

$$\eta(u)=\frac{1}{\rho_0}\Big(a_3\big(\rho^{-1}(u)\big)[(a_2(a_1\Omega')')']^\gamma\big(\rho^{-1}(u)\big)\Big)$$
$$+\frac{h_0^\beta}{\rho_0k_0}\Big(a_3\left(\rho^{-1}\big(k(u)\big)\right)[(a_2(a_1\Omega')')']^\gamma\left(\rho^{-1}\big(k(u)\big)\right)\Big)$$

من السهل الوصول الى

$$\eta\left(k^{-1}(\rho(u))\right) \leq \left(\frac{k_0 + {h_0}^{\beta}}{\rho_0 k_0}\right)\left(a_3(u)[(a_2(a_1\Omega')')']^{\gamma}(u)\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\rho_0 k_0}{k_0 + {h_0}^{\beta}}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}} \eta^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(k^{-1}(\rho(u))\right) \leq a_3^{\frac{\beta}{\gamma}}(u)[(a_2(a_1\Omega')')']^{\beta}(u)$$

بالتعويض في المعادلة (16)، نصل الى ان η حل موجب للمتباينة

$$\eta'(u) + +\frac{1}{L}Q(u)\left(\frac{\rho_0 k_0}{k_0 + h_0^{\beta}}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}} \eta^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(k^{-1}(\rho(u))\right) I_{123}^{\beta}(u) \leq 0$$

وهذا تناقض.

نظرية 2. بفرض ان $h_0 < 1$ و $\rho(u) \leq u$. إذا كانت المعادلة

$$\emptyset'(u) + (1 - h_0)^{\beta} q(u) \emptyset^{\frac{\beta}{\gamma}}(\rho(u)) I_{123}^{\beta}(\rho(u)) = 0 \qquad (17)$$

متذبذبة فإن المعادلة (1) متذبذبة.

الاثبات: باتباع خطوات اثبات النظرية 1 حتى المعادلة (12) ومن تعريف Ω نجد ان:

$$\begin{aligned} \Omega(u) &= y(u) + h(u)y\big(k(u)\big) \\ \Longrightarrow y(u) &= \Omega(u) - h(u)y\big(k(u)\big) \\ &\geq \Omega(u) - h_0 y\big(k(u)\big) \\ &\geq \Omega(u) - h_0 y(u) \\ &\geq \Omega(u) - h_0\Omega(u) = (1 - h_0)\Omega(u) \qquad (18) \end{aligned}$$

بالتعويض بـ (18) في المعادلة (1) نحصل على الآتي:

$$\begin{aligned} 0 &= (a_3[(a_2(a_1\Omega')')']^{\gamma})'(u) + q(u)y^{\beta}\big(\rho(u)\big) \\ &\geq (a_3[(a_2(a_1\Omega')')']^{\gamma})'(u) + q(u)(1 - h_0)^{\beta}\Omega^{\beta}\big(\rho(u)\big) \end{aligned}$$

باستخدام نتيجة 3، نصل الى

$$\begin{aligned} 0 \geq (a_3[(a_2(a_1\Omega')')']^{\gamma})'(u) + \\ q(u)(1 - h_0)^{\beta} a_3^{\frac{\beta}{\gamma}}(\rho(u))[(a_2(a_1\Omega')')']^{\beta}(\rho(u)) I_{123}^{\beta}(\rho(u)) \qquad (19) \end{aligned}$$

بفرض أن

$$\emptyset(u) = a_3(u)\big[\big(a_2(u)\big(a_1(u)\Omega'(u)\big)'\big)'\big]^{\gamma}$$

وبذلك فإن $\emptyset$ حل موجب للمتباينة

$$\emptyset'(u) + q(u)(1 - h_0)^{\beta}\emptyset^{\frac{\beta}{\gamma}}(\rho(u)) I_{123}^{\beta}(\rho(u)) \leq 0.$$

بالرجوع للنتيجة 1. [24] نجد ان للمعادلة (17) كذلك حل موجب. وهذا تناقض.

خاتمة:

تركز هذه الدراسة على مسألة أساسية، الا وهي فهم العلاقة بين الدالة $\Omega(u)$ والحل $y(u)$ للمعادلة التفاضلية ذات التأخير المحايدة (NDDE) من الرتبة الرابعة. عرضنا خلال هذه الدراسة بعض نظريات التذبذب والتي من خلالها وضعنا معايير التذبذب التي تضمن تذبذب حلول المعادلة قيد الدراسة. استخدمنا تقنية ريكاتي ونظرية المقارنة لإثبات ان كل حلول المعادلة (1) متذبذبة.

نتائج هذه الدراسة تكمل وتوسع العديد من النتائج المنشورة سابقا في الادبيات العلمية. علاوةً على ذلك سنعمل مستقبلاً على دراسة المعادلة (1) تحت الشروط

$$\int_{u_0}^{\infty} \frac{1}{a_3^{\frac{1}{\gamma}}(s)} ds < \infty, \qquad \int_{u_0}^{\infty} \frac{1}{a_i(s)} ds < \infty, \qquad i = 1, 2.$$

قائمة المراجع:

[1] M. Braun, "Differential Equations and Their Applications," *An Introduction to Applied Mathematics. Springer Science & Business Media,* June 2013.

[2] E. M. Elabbasy, A. Nabih, T. A. Nofal, W. R. Alharbi and O. Moaaz, "Neutral di erential equations with noncanonical operator: Oscillation behavior of solutions," *AIMS Mathematics,* p. 6(4):3272–3287, 15 January 2021.

[3] G. Ladas, V. Lakshmikantham and J. S. Papadakis, " Oscillations of higher-order retarded differential equations generated by the retarded argument," *Elsevier eBooks,* pp. 219-231, 27 January 1972.

[4] G. Xing, T. Li and C. Zhang, "Oscillation of higher-order quasi linear neutral differential equations," *Advances in Difference Equations,* pp. 1-10, October 2011.

[5] Q. Zhang, J. Yan and L. Gao, "Oscillation behavior of even-order nonlinear neutral differential equations with variable coefficients," *Computers & Mathematics With Applications,* p. 59(1):426–430, July 2009.

[6] S. S. Santra, A. Ghosh and I. Dassios, "Second-order impulsive differential systems with mixed delays: Oscillation theorems," *Mathematical Methods in the Applied Sciences,* p. 45(18):12184–12195, October 2021.

[7] E. TUNÇ and . O. Dzdemir, "Comparison theorems on the oscillation of even order nonlinear mixed neutral differential equations," *Mathematical Methods in theApplied Sciences,* p. 46(1):631–640, June 2022.

[8] B. Almarri, B. Batiha, O. Bazighifan and F. Masood, "Third-order neutral differential equations with non-canonical forms: Novel oscillation theorems," *Axioms,* p. 13(11):755, October 2024.

[9] M. Bohner, S. R. Grace and I. Jadlovska, "Sharp results for oscillation of second-order neutral delay differential equations," *Electronic Journal of QualitativeTheory of Differential Equations,* p. 2023(4):1–23, January 2023..

[10] I. Jadlovska, "New criteria for sharp oscillation of second-order neutral delay differential equations," *Mathematics,* p. 9(17):2089, August 2021.

[11] . O. Moaaz, I. Dassios, W. Muhsin and A. Muhib, "Oscillation theory for non-linear neutral delay differential equations of third order," *Applied Sciences,* p. 10(14):4855, July 2020.

[12] O. Moaaz, R. A. El-Nabulsi, W. Muhsin and O. Bazighifan, "Improved oscillation criteria for 2nd-order neutral differential equations with distributed deviating arguments," *Mathematics,* p. 8(5):849, May 2020.

[13] W. Muhsin, O. Moaaz, S. S. Askar, A. M. Alshamrani and E. M. Elabbasy, "Delay differential equations with several sublinear neutral terms: Investigation of oscillatory behavior," *Symmetry,* p. 15(12):2105, November 2023.

[14] N. Omar, O. Moaaz, G. AlNemer and E. . M. Elabbasy, "New results on the oscillation of solutions of third-order differential equations with multiple delays," *Symmetry,* p. 15(10):1920, October 2023.

[15] G. AlNemer, W. Muhsin, O. Moaaz and E. M. Elabbasy, "On the positive decreasing solutions of half-linear delay differential equations of even order," *Mathematics,* p. 11(6):1282, March 2023.

[16] C. Zhang, T. Li, . B. Sun and E. Thandapani, "On the oscillation of higher-order half-linear delay differential equations," *Applied Mathematics Letters,* p. 24(9):1618–1621, April 2011.

[17] M. Hamid, M. Usman, R. U. Haq and Z. Tian, "A spectral approach to analyze the nonlinear oscillatory fractional-order differential equations," *Chaos Solitons & Fractals,* p. 146:110921, April 2021.

[18] A. . M. Hassan, O. Moaaz, S. . S. Askar, A. M. Alshamrani and S. E. Affan, "Enhanced oscillation criteria for non-canonical second-order advanced dynamic equations on time scales," *Symmetry,* p. 16(11):1457, November 2024.

[19] T. S. Hassan, R. A. El-Nabulsi, N. Iqbal and A. . A. Menaem, "New criteria for oscillation of advanced noncanonical nonlinear dynamic equations," *Mathematics,* p. 12(6):824, March 2024.

[20] F. Masood, O. Moaaz, S. . S. Santra, U. Fernandez-Gamiz and . H. A. El-Metwally, "Oscillation theorems for fourth-order quasi-linear delay differential equations," *AIMS Mathematics,* p. 8(7):16291–16307, January 2023.

[21] O. Bazighifan, O. Moaaz, R. El-Nabulsi and A. Muhib, "Some new oscillation results for fourth-order neutral differential equations with delay argument," *Symmetry,* p. 12(8):1248, July 2020.

[22] A. Nabih, O. Moaaz, G. AlNemer and E. M. Elabbasy, "New conditions for testing the asymptotic and oscillatory behavior of solutions of neutral differential equations of the fourth order," *Axioms,* p. 12(2):219, February 2023.

[23] W. Muhsin, B. Almarri, M. S. Jazmati, O. Moaaz and E. . M. Elabbasy, "Fourth Order Functional Differential Equations of Neutral Type: Enhanced Oscillation Theorems," *European Journal of Pure and Applied Mathematics,* pp. 18(1), 5729-5729, 2025.

[24] C. G. Philos, "On the existence of non-oscillatory solutions tending to zero at ∞ for differential equations with positive delays," *Archiv der Mathematik,* pp. 36:168–178, 1981, 1981.