The North African Journal of Scientific Publishing (NAJSP)
مجلة شمال إفريقيا للنشر العلمي (NAJSP)
E-ISSN: 2959-4820
Volume 3, Issue 2, April - June 2025
Page No: 19-25
Website: https://najsp.com/index.php/home/index
SJIFactor 2024: 5.49 معامل التأثير العربي (AIF) 2024: 0.71 ISI 2024: 0.696

استخدام المتسلسلات (النقطة الشاذة) في حل مسائل القيم الحدية منظومة (Sturm-Liouville)

ذكريات عبد المولى سالم العيساوي [1*]
[1]قسم الرياضيات، كلية التربية القصيعة، جامعة الزيتونة، ليبيا

The Use of Serials (The Anomalous Point) to Solve the Problems of Marginal Values (Sturm-Liouville) System

Thekryat Abdul Mawla Salem Al-Issawi[1*]
[1]Department of Mathematics, Faculty of Education, Al-Qasi'a, Al-Zaytouna University, Libya

*Corresponding author	dkabdo224@gmail.com	*المؤلف المراسل

تاريخ النشر: 2025-04-16	تاريخ القبول: 2025-04-06	تاريخ الاستلام: 2025-02-08

الملخص

بصفة عامة منظومة شتروم لوفيل تحتوي على معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الثانية مع شرطين حديين خطين متجانسين لدالة مجهولة $y(x)$ ، ومنظومة شتروم لوفيل تنشأ من مسائل القيم الحدية Dirichlet و Neuman و Robin و مسائل القيم الحدية القطبية ،في هذه الورقة قدمنا اقتراح حل لمنظومة شتروم لوفيل باستخدام متسلسلات القوى عندما $x = x_0$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية، والنتيجة هنا وبتطبيق الشروط الحدية تحصلنا على الحل العام لمنظومة شتروم لوفيل الذي يحقق لكل قيمة ذاتية λ_n تناظرها دوال ذاتية $y_n(x)$ وهذه الدوال هي حلول مستقلة خطيا ضمن الفترة $a < x < b$.

الكلمات المفتاحية: الشرطين الحديين، الدوال الذاتية، القيمة الذاتية، النقطة الشاذة المنتظمة-منظومة شتروم لوفيل.

Abstract

In general, Sturm-Liouville system contains a second- order homogeneous differential equation with two boundary conditions, two homogeneous lines of an unknown function $y(x)$ and the Sturm-Liouville system of Dirichlet, Neuman, and Robin originates. In this paper, we will present a proposal to solve the Sturm-Liouville equation using the power series, when $x = x_0$ is Regular Singular point of the Sturm-Liouville system is achieved and it is found that each eigenvalue $\lambda_n$corresponds to an eigenfunction $y_n(x)$and these functions are linearly independent and orthogonal solutions within the period $a < x < b$.

Keywords: Boundary conditions, eigenvalue, eigenfunction, Sturm Liouville system.

المقدمة

عند اجراء فصل المتغيرات على مسائل القيم الحدية الخطية نتحصل على مسألة قيم حدية أو (معادلة تفاضلية عادية).

$$y'' + \lambda^2 y = 0 \quad z \quad (1)$$ لكل $y(x)$

فعندما يكون لمسألة القيم الحدية شرطين حديين من شروط Dirichlet فإننا نتحصل على المنظومة

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda^2 y=0 \qquad 0<x<l \qquad (2)$$

$$y(0)=0$$

$$y(l)=0$$

وعندما يكون لمسألة القيم الحدية شرطين حديين من شروط Neuman فأننا نتحصل على المنظومة

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda^2 y=0 \qquad 0<x<l \qquad (3)$$

$$y'(0)=0$$

$$y'(l)=0$$

وهي ما تعرف بمنظومة Sturm-Liouville وهي معادلة كلاسيكية (معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية).

$$\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right)+[\lambda p(x)-q(x)]y=0$$

سميت هكذا نسبة إلى عالمي الرياضيات الفرنسيين جاك شارل فرانسوا ستروم وجوزيف ليوفيل. عموماً نظام Sturm-Liouville ينشأ من مسائل القيم الحدية التي تحتوي على مجموعة شروط حدية Dirichlet وNeuman و Robin كذلك مسائل القيم الحدية في الاحداثيات القطبية [1,2] .

ففي المنظومة (2) عندما تكون 0 >λوتطبيق الشروط الحدية نتحصل على الحل العام للمنظومة

$$y(x)=0 \quad (4)$$

وعندما0 = λ وكذلك بتطبيق الشروط الحدية نتحصل على الحل العام للمنظومة (2)

$$y(x)=0 \quad (5)$$

وهو حل شاذ لمنظومة Sturm-Liouville.

أي يجب ان تكون القيم الذاتية من منظومة Sturm-Liouville موجبة فعند 0<λوبتطبيق الشروط الحدية مرة أخرى نتحصل على الحل العام للمنظومة (2)

$$y(x)=b\sin\sqrt{\lambda}\,x \quad (6)$$

$$\lambda_n=\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4l^2} \quad ,n=0,1,2,\ldots.$$

$$y_n=b\sin\frac{\pi(2n-1)}{2l}x$$ وهي دوال ذاتية [1-7]

الورقة [8] اقترحت حل لمنظومة Sturm-Liouville باستخدام متسلسلات القوى عندما x تكون نقطة عادية. وفي هذه الورقة أقترح حل لمنظومة Sturm-Liouville باستخدام متسلسلات القوى ايضاً، عندما تكون x نقطة شاذة منتظمة لمنظومة Sturm-Liouville، والنتيجة هنا بتطبيق الشروط الحدية تحصلنا على الحل العام لمنظومة Sturm-Liouville. الذي يحقق كل قيمة ذاتية λ_nتناظرها دالة ذاتية $y_n(x)$، وهذه الدوال هي حلول مستقلة خطيا ومتعامدة لكل

$$a<x<b \; .$$

1-تعاريف ومفاهيم

تعريف (1.1) طريقة فروبينيوس :Frobenius Method

1-نعرف متسلسلة قوى حول $x=x_0$

$$(7) f(x)=C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\,(x-x_0)^n$$

نفرض أن المعادلة الاتية:

$$r(x)\,y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

حيث أن كل من q,p,r دوال تحليلية في x أي يمكن التعبير عن كل منها بمتسلسلة قوى فيx_0 .

2-إذا كانت $x=x_0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية:

$$r(x)\, y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

وكانت الدوال q, p, r هي دوال تحليلية فيxأي يمكن التعبير عنها بمتسلسلة قوى فيx . فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية أعلاه يمكن وضعه على الصورة:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n = C_0 y_1(x) + C_1 y_2(x) \quad (8)$$

حيثC_0،C_1 ثوابت اختيارية وأنy_1،y_2 حلول مستقلة خطياً عندما x [3,4].

3-إذا كانت$x = x_0$ نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0r(x)$$

يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة:

$$y'' + \frac{p(x)}{(x - x_0)} y' + \frac{q(x)}{(x - x_0)^2} y = 0$$

حيث إن q, p, r دوال تحليلية عند x ، $x = x_0$ تسمى نقطة شاذة منتظمة Regular Singular (point)، و إذا لم يتحقق هذا الشرط فإن $x = x_0$ تسمى نقطة شاذة غير منتظمة Irregul Singular (Point) [3-6]

نظرية (1): إذا كانت $x = x_0$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + \frac{p(x)}{(x - x_0)} y' + \frac{q(x)}{(x - x_0)^2} y = 0$$

فإنه يوجد على الأقل حل واحد ويمكن كتابته على الصورة:

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=1}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \quad , C_0 \neq 0 \quad (9)$$

$$r(r - 1) + p(x_0)r + q(x_0) = 0 \; (10)$$

والتي تسمى بالمعادلة بالمحددة، حيث r جذر للمعادلة المحددة(Indicial Equation). إذا كان r_1, r_2 جذري المعادلة المحددة وكان الفرق $r_1 - r_2$ لا يساوي عدداً صحيحاً، فإنه يوجد حلان مستقلان على الصورة (9) لكل من الجدرينr_1, r_2 [3,7].

نظرية(2): أذا كانت x_0نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + \frac{p(x)}{(x - x_0)} y' + \frac{q(x)}{(x - x_0)^2} y = 0$$

وr_1, r_2 جذري المعادلة المحددة فأن:

1- أذا كان $r_1 = r_2 = r$ فأن للمعادلة التفاضلية حليين في الصورة:

$$y_1 = (x - x_0)^r \sum_{n=1}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \quad , \quad C_0 \neq 0$$

$$y_2 = y_1 \ln(x - x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (x - x_0)^{n+1} \sum_{n=0}^{\infty} D_n (x - x_0)^n$$

[3,5].

تعريف (2.1): ليكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية بالإضافة إلى شرطيين حديين متجانسين لدالة المجهولة$y(x)$.

$$\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right) + [\lambda p(x) - q(x)]y = 0 \quad (11)$$

$$l_1 y'(a) + h_1 y'(a) = 0 \quad (11, a)$$

$$(11, b) l_2 y'(b) + h_2 y'(b) = 0$$

حيث أن q, p, r دوال حقيقية p لها مشتقة متصلة، وكذلك q، r دالتان متصلتان، $0 < p$, $r > 0$ لكل قيم x على الفترة $a \le x \le b$, λ بارمترا ، لا يعتمد على x. وان l_1، l_2، h_1، h_2 ثوابت حقيقية مستقلة عن البارمتر λ بحيث l_1، l_2 لا يتلاشيان معاً وكذلك h_1، h_2 لا يتلاشيان معاً. تسمى هذه المسألة بمسألة Sturm-Liouville [1,2].

الأن لندرس الحل لمنظومة Sturm-Liouville، لأي معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الثانية عندما تكون $R(x) > 0$ لكل $a < x < b$.

$$(12)\ R(x)\frac{d^2y}{dx^2} + S(x)\frac{dy}{dx} + [\lambda P(x) - q(x)]y = 0$$

بما أن $R(x) > 0$ يمكن كتابة المعادلة بالشكل

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{s(x)}{R(x)}\frac{dy}{dx} + \left[\lambda\frac{P(x)}{R(x)} - \frac{Q(x)}{R(x)}\right]y = 0 (13)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + B(x)\frac{dy}{dx} + [\lambda U(x) - V(x)]y = 0 (14)$$

بضرب الدالة $e^{\int B(x)dx}$ في كل حد

$$e^{\int B(x)dx}\frac{d^2y}{dx^2} + e^{\int B(x)dx}B(x)\frac{dy}{dx} + \left[\lambda U(x)e^{\int B(x)dx} V(x)e^{\int B(x)dx}\right] y = 0 (15)$$

ولكن:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int B(x)dx}\frac{dy}{dx}\right] = (e^{\int B(x)dx}\frac{d^2y}{dx^2} + e^{\int B(x)dx}B(x)\frac{dy}{dx} \quad (16)$$

$$(17)\ \frac{d}{dx}\left[e^{\int B(x)dx}\frac{dy}{dx}\right] + \left[\lambda U(x)e^{\int B(x)dx} - V(x)e^{\int B(x)dx}\right]y = 0$$

بوضع $V(x) = 0$ نحصل على

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int B(x)dx}\frac{dy}{dx}\right] + \left[\lambda U(x)e^{\int B(x)dx}\right]y = 0$$

بوضع:

$$r(x) = e^{\int B(x)dx}, \qquad p(x) = U(x)e^{\int B(x)dx}$$

$$r(x) > 0 \text{ لكل } a < x < b, \qquad r'(x) > 0$$

وبذلك نتحصل على

$$(18)\ \frac{d}{dx}\left[r(x)\frac{dy}{dx}\right] + [\lambda p(x)]y = 0, \quad a < x < b$$

الآن-إذا كانت $x = x_0$ نقطة شاذة للمعادلة (18) بحيث تحقق

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xp(x)}{r(x)} = k_1$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2 q(x)}{r(x)} = k_2$$

نضع الحل على الصورة:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X^{n+r} \qquad (19)$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, C_n X^{n+r-1} \quad (20)$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,(n+r-1) C_n X^{n+r-2} \quad (21)$$

و التعويض عن y , y' , y'' في المعادلة (18) نتحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية (18).

مثال: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dx}{dy} + \lambda y = 0 \qquad 1 < x < e \quad (22)$$

$$y(1) = 0 = y(e)$$

لحل مثل هذه المعادلة يمكن أعادة كتابة المعادلة بالشكل

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{\lambda}{x^2} y = 0 \quad (23)$$

حيث $x = 0$ نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية (23)

ولكن نجد ان:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\lambda (x - x_0)^2}{x^2} = \lambda$$

إذاً $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية(23).

ولا يجاد الحل العام، من المعادلة (19)، (20)، (21) نفرض الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X^{n+r}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, C_n X^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,(n+r-1) C_n X^{n+r-2}$$

بالتعويض عن y , y' , y'' في المعادلة التفاضلية (22)نتحصل على.

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^r + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, (n+r) x^r + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, x^{n+r} = 0$$

بمساواة معاملات الأصغر قوة للمتغير x بالصفر فنحصل على المعادلة المحددة

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)\,(n+r-1) + (n+r) + \lambda] x^{n+r} = 0$$

$$r(r-1) + r + \lambda = 0\,, \quad n = 0$$

$$r^2 + \lambda = 0 \quad \to \quad r^2 = -\lambda \quad \to \quad r = \pm i\sqrt{\lambda}$$

ولكن $n \geq 0$ ومساواة معاملات الأكبر قوة للمتغير x بالصفر فنتحصل على

$$(n+r)(n+r-1) + (n+r) + \lambda = 0$$

$$(n+r)^2 (n+r) + (n+r) + \lambda = 0$$

$$(n+r)^2 + \lambda = 0$$

وتكون الصيغة التكرارية $C_n = \frac{-C_{n-1}}{(n+r)^2+\lambda} \quad , \quad n \geq 1$

$$n = 1 \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{-C_0}{(r+1)^2+\lambda}$$

$$n = 2 \quad \rightarrow \quad C_2 = \frac{-C_1}{(r+2)^2+\lambda} = \frac{C_0}{((r+1)^2+\lambda)((r+2)^2+\lambda)}$$

$$n = 3 \quad \rightarrow \quad C_3 = \frac{-C_2}{(r+3)^2+\lambda}$$

$$C_3 = \frac{-C_0}{((r+1)^2+\lambda)((r+2)^2+\lambda)((r+3)^2+\lambda)}$$

$$n = 4 \quad \rightarrow \quad C_4 = \frac{-C_3}{(r+4)^2+\lambda}$$

$$= \frac{C_0}{((r+1)^2+\lambda)((r+2)^2+\lambda)((r+3)^2+\lambda)\left(((r+4)^2+\lambda)\right)}$$

فنتحصل على المتسلسلة

$$C_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{((r+n)^2+\lambda)!} \quad , \quad n \geq 1$$

فيكون

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{((r+n)^2+\lambda)!} X^{n+r}$$

$$y(x) = X^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{((r+n)^2+\lambda)!} X^n$$

ولكن $r = \pm i\sqrt{\lambda}$

وبالتعويض عن r نجد ان

$$y(x) = x^{i\sqrt{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$$

$$y(x) = x^{i\sqrt{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n + x^{-i\sqrt{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n$$

حيث C_n, D_n ثوابت اختيارية.

$$C_n = \frac{-C_{n-1}}{\left((n+i\sqrt{\lambda})^2+\lambda\right)} = \frac{(-1)^n C_0}{\left((n+i\sqrt{\lambda})^2+\lambda\right)!} \quad , \quad n \geq 1$$

وبذلك نتحصل على الحل للمعادلة (22)

$$,y(x) = A_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\ln x\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\ln x\right)$$

$$A_1, A_2 \in R$$

وبتطبيق الشرطيين الحديين

$$y(1) = 0 = y(e)$$

$$0 = A_1 \sin(0) + A_2 \cos(0) \qquad \Longrightarrow A_2 = 0$$

ولكن:

$$0 = \sin\sqrt{\lambda}$$
$$\sqrt{\lambda} = n\pi \qquad , \qquad n = 1,2,3, \ldots.$$
$$\lambda = (n\pi)^2 \qquad , \qquad n = 1,2,3, \ldots$$
وهي قيمة ذاتية مناظرة للدالة الذاتية
$$y_n(x) = \sin(n\pi)x \quad n = 1,2,3, \ldots$$
$$y(x) = A_1 \sin(n\pi)x$$
وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية(22).
حيث يناظر كل قيمة ذاتية λ_n دوال ذاتية ويرمز لها بالرمز $y_n(x)$.

نظرية (3): جميع القيم الذاتية لمنظومة Sturm-Liouville حقيقة وتكون جميع الدوال الذاتية المناظرة للقيم الحقيقية متعامدة على الفترة [a,b] [1].

الخاتمة:

من خلال التحليل الرياضي لحل منظومة Sturm-Liouville باستخدام متسلسلات القوى عندما تكون x نقطة شاذة منتظمة لمنظومة Sturm-Liouville. توصلنا لنتائج مرضية، فعند تطبيق الشروط الحدية على النتائج التي تم الحصول عليها، تحصلنا على الحل العام لمنظومة Sturm-Liouville، الذي يحقق لكل قيمة ذاتية λ_n تناظرها دالة ذاتية $y_n(x)$ ، وهذه الدوال هي حلول مستقلة خطياً ومتعامدة لكل $a < x < b$.

ونستنتج كذلك أذا كانت $y_n(x)$ دالة ذاتية تناظر القيمة الذاتية λ_n وكانت $C \neq 0$ ثابت اختياري، فإن $Cy_n(x)$ دالة ذاتية تناظر القيمة الذاتية λ_n.

ايضاً في منظومة Sturm-Liouville لا يمكن أن نجد حلين مستقلين خطياً مناظران لقيمة ذاتية واحدة، أي لا يمكن أن تكون دالتان ذاتيتان خطيتان مستقلتان مناظرة لنفس القيمة الذاتية.

المراجع

1. Donald w. trim – Applied partial differential Equation-Boston pws publishing Company, 1990.
2. Godokington E. A. and N Levinson J heory of ordinary differential Equation New York: Megt w – hill, 1995.
3. William E.Boyce, Richard C.Diprima, Douglas B.Meade , Elementary Differetial Equations and Boundary Value Problems, 2019.
4. Coddington, E. A., An Introduction to Ordinary Differential Equations (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1961; New York: Dover, 1989)
5. Copson, E. T., An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable (Oxford: Oxford University Press, 1935).
6. K. Knopp, Theory and Applications of Infinite Series (NewYork: Hafner, 1951).
7. Coddington, E. A., and Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations (New York: McGraw-Hill, 1955; Malabar, FL: Krieger, 1984).
8. ذكريات عبد المولى سالم، استخدام المتسلسلات في حل مسائل القيم الحدية (منظومة شتروم لوفيل)، ديسمبر 2023/2022جامعة المرقب-العدد العاشر.